マジで!!

見て分かる!

圏論!

東田京介

自己紹介

今はITエンジニア。

無限次元量子群とか。

- 数学専攻でした。

京大農 → 北大数

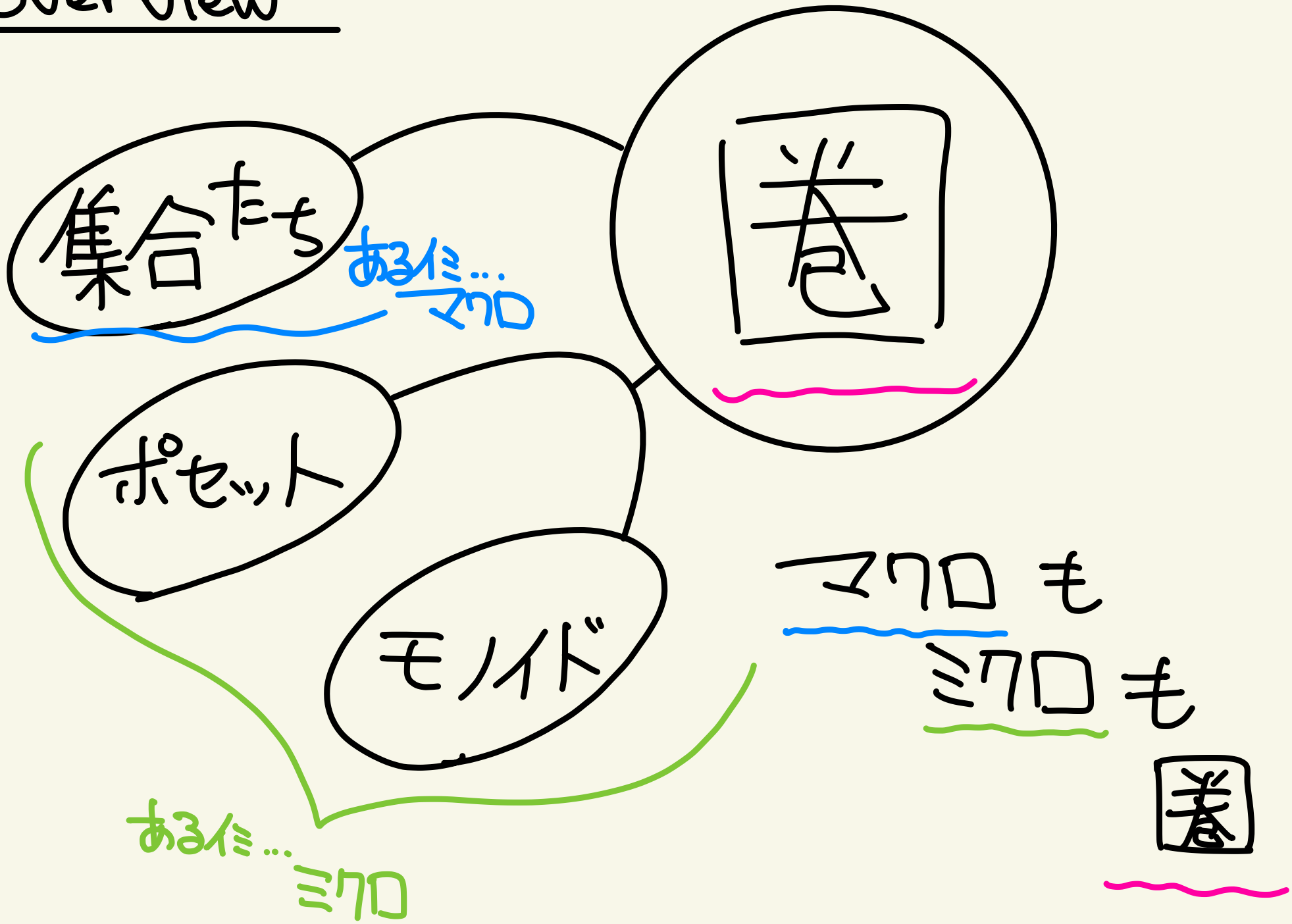
東大数

- 趣味はボルダリング・数学。
  音楽聴いたり、漫画読んだり。
- twitter/X : GengaQ SurvivaR
  @kyow_gg

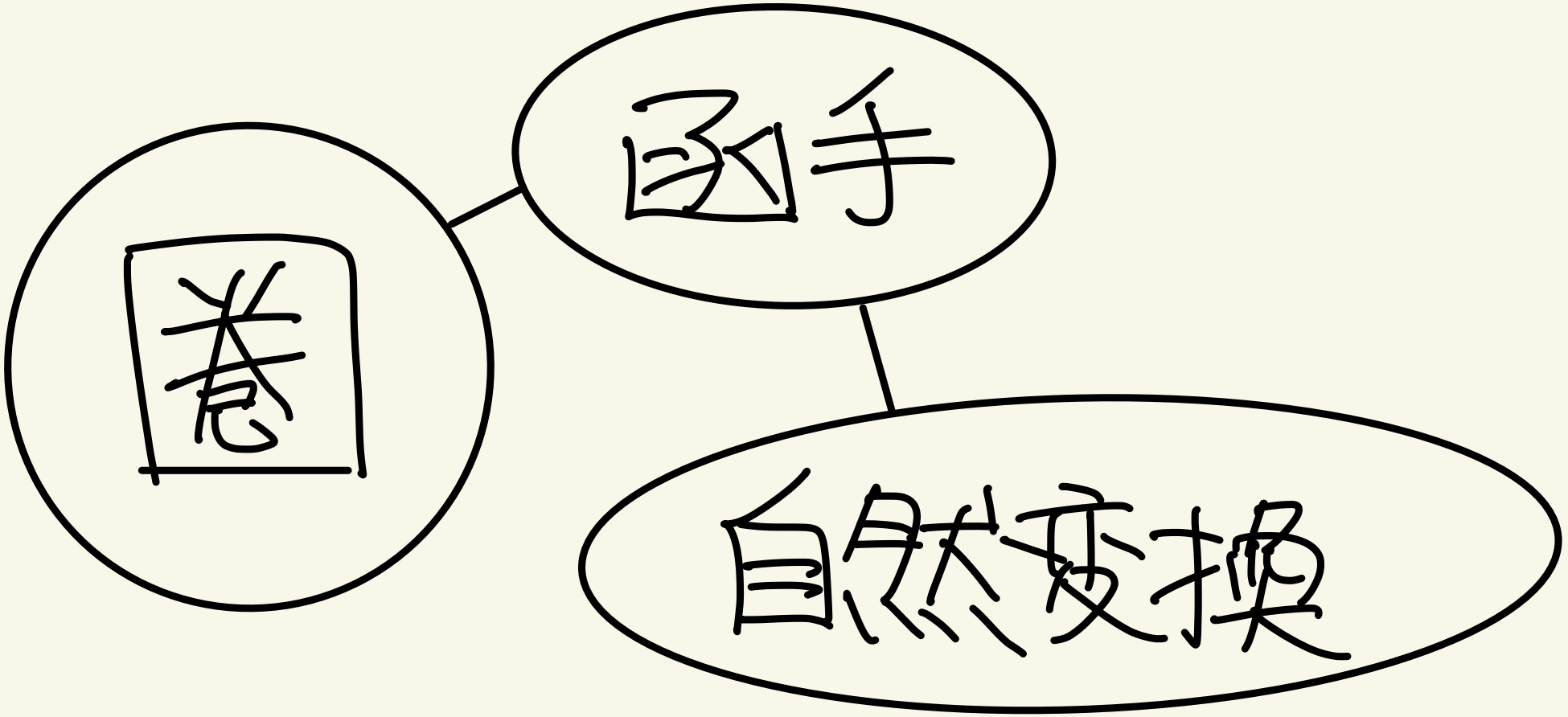
目次

- 前奏：「少しの集合」
- モノイドとポセット
- 主題：圏論入門
- 米田の補題と補遺

Overview



Overview



関連する概念的"もの"たち.

Overview

極限

普遍性

今日やる

随伴

エンド/コエンド

Kan拡張

概念たち...

Overview

今日の中心的な"もの"と定理

前層と米田の補題

とても便利で示唆に満ちてる

とても沢山ある！

前奏：少しの集合

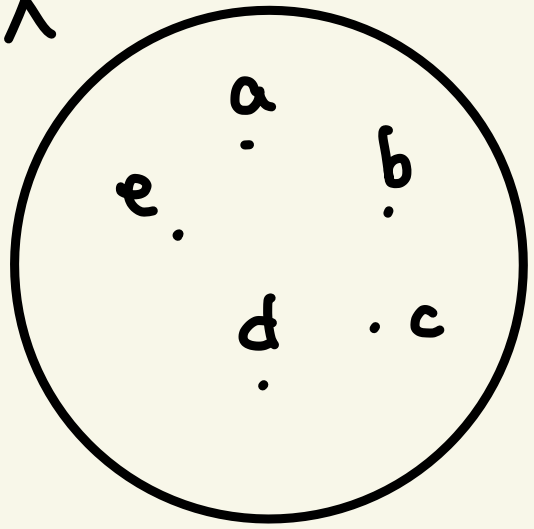
集合って？

集合：“もの”の集まり。

$x \overset{\text{in}}{\in} X$ とか $x \overset{\text{not in}}{\notin} X$ とか書くヨ。

↳ 要素/元/elementという。

X



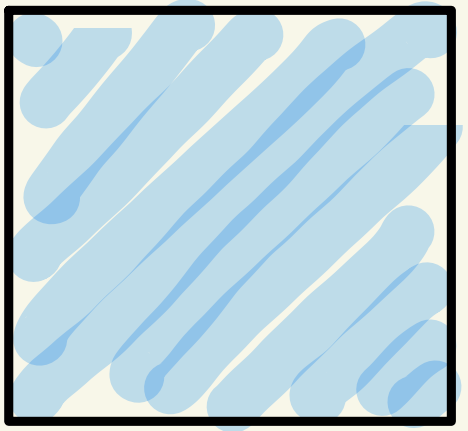
囲ってみたり。

Y

0 1 2 3 4 5

要素だけ並べたり。

Z



ぎっしり詰まってると思ってみたり。

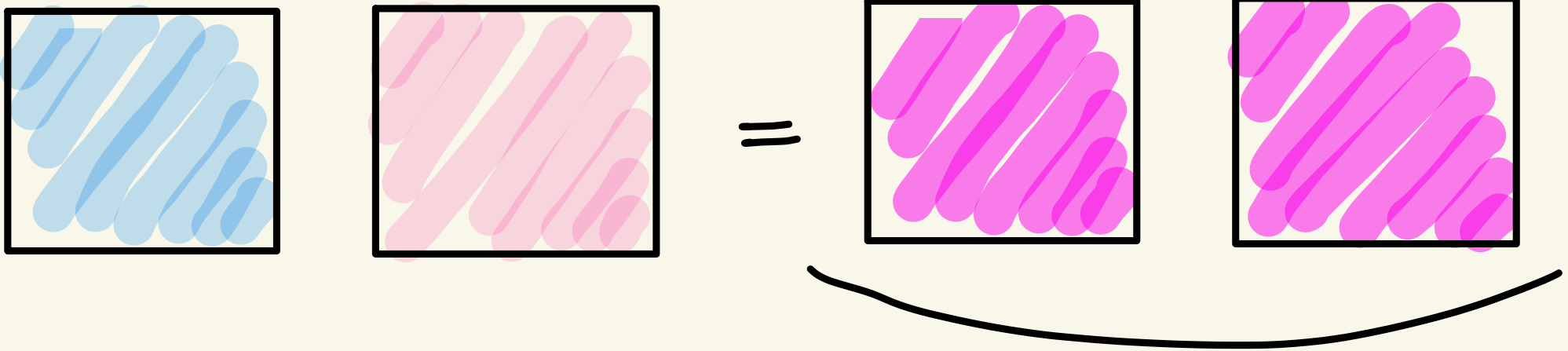
※“何もない”も集合。

$\emptyset$ と書く。

集合の和

※ $X \cup \emptyset = X$ ダヨ。

$X \cup Y$



1つの集合と見なす。

あるいは…

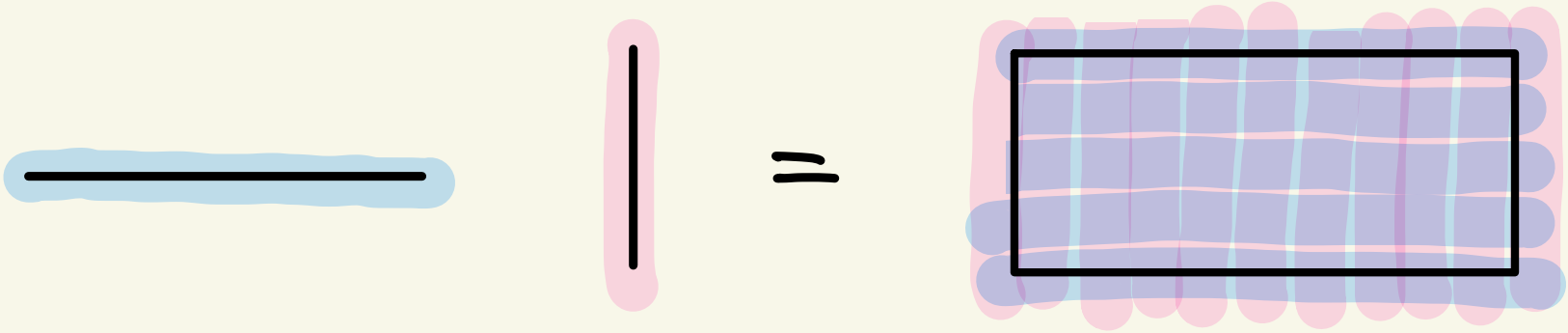
$\{\cdots\} \cup \{\cdots\} = \{\cdots\cdots\}$

集合の積

※ $X \times \{\bullet\} = X$ ダヨ

1元集合

$X \times Y$

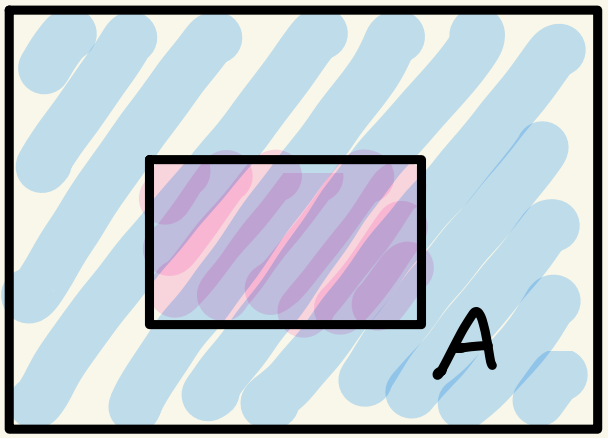


あるいは…

$\{\cdots\} \times \{\cdots\} = \left\{ \begin{matrix} \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{matrix} \right\}$

組(タプル)の集合

部分集合



$A \subset X$ と書く。

← $A = X$ も含む。

☆ 述語と深く関係してる。

変数を含む命題：$x < 5$ とか。

Q 述語が真となる要素を集めて、部分集合が得られる。

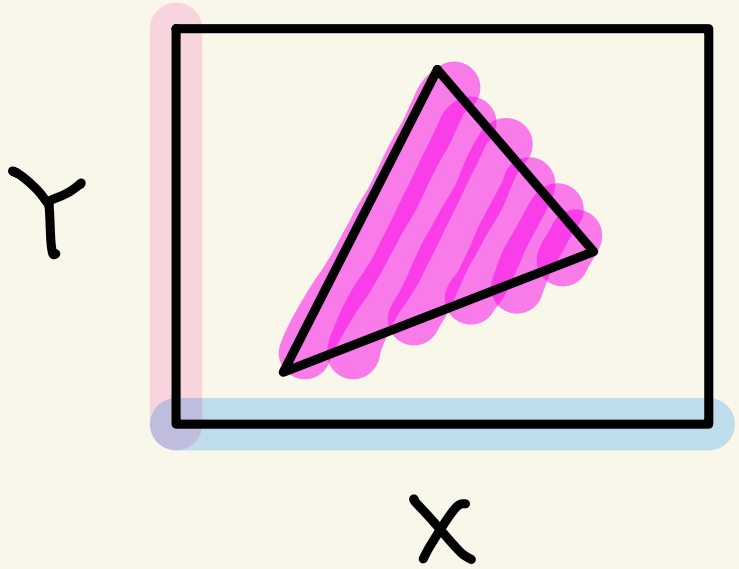
$\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\cup$

$\{0, 1, 2 \ldots\} = \{x : 整数 \mid x \geq 0\}$

対応って？

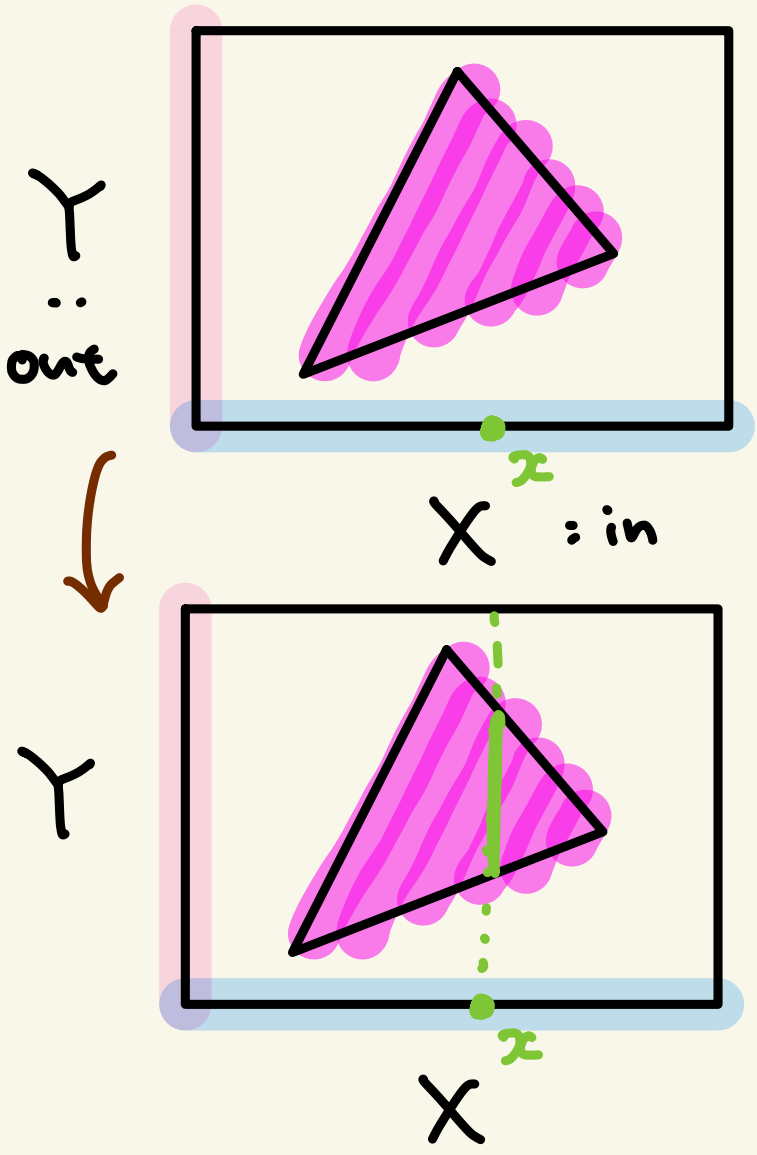
・$R \subset X \times Y$ のこと。（関係とも言う。）



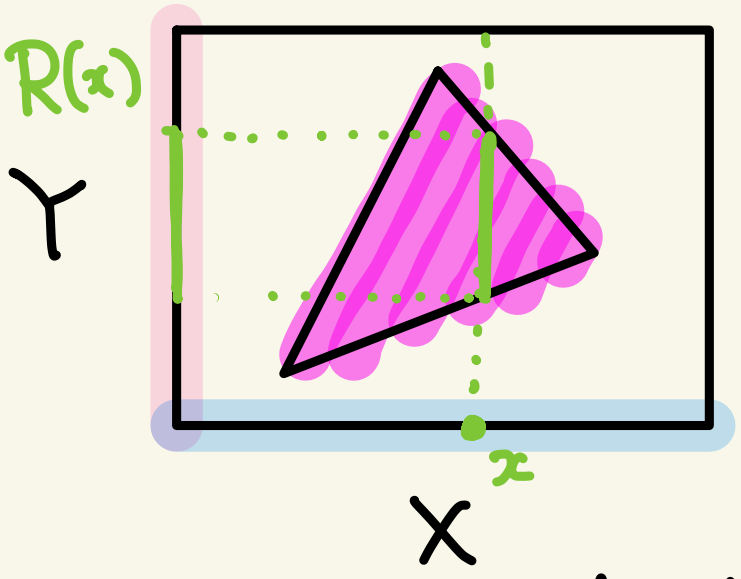
これを"入出力/in-out"の情報として読む。

対応って？

・$R \subset X \times Y$ のこと。（関係とも言う。）



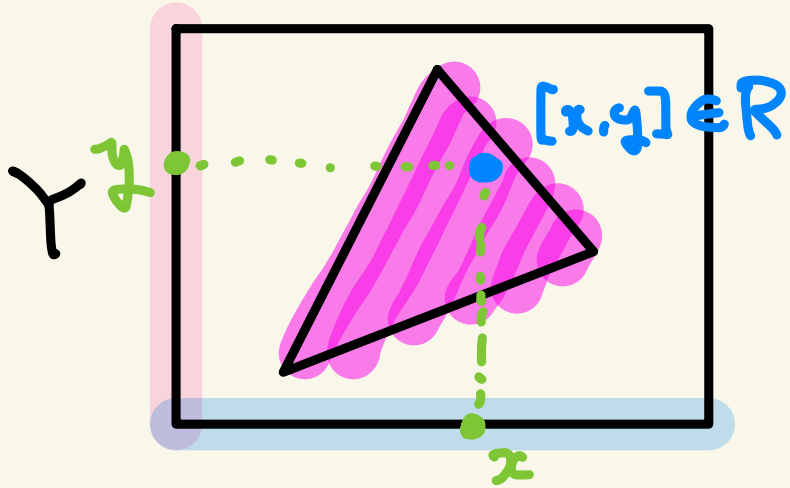
これを"入出力/in-out"の情報として読む。



xを入力すると出力値の候補の集合 $R(x)$ が得られる。

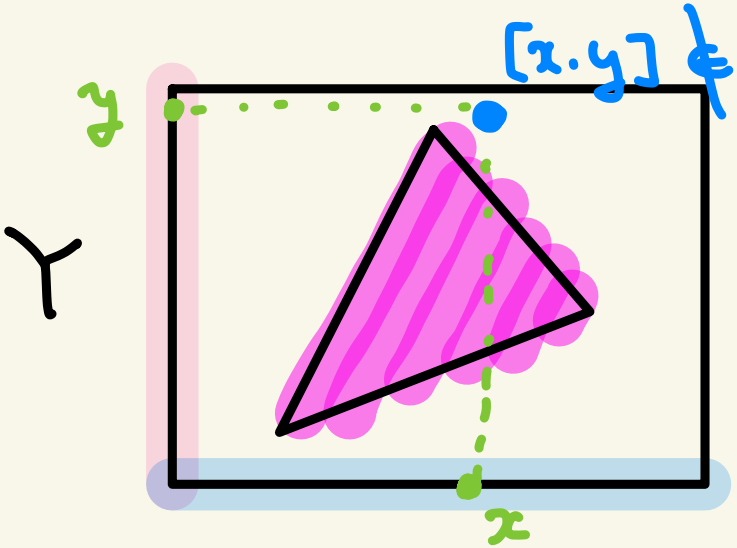
対応って？

・$R \subset X \times Y$ のこと。（関係とも言う。）



これを"$x \in X$"と"$y \in Y$"の間の、関係の"有無"として読む。

関係アリ：yRx

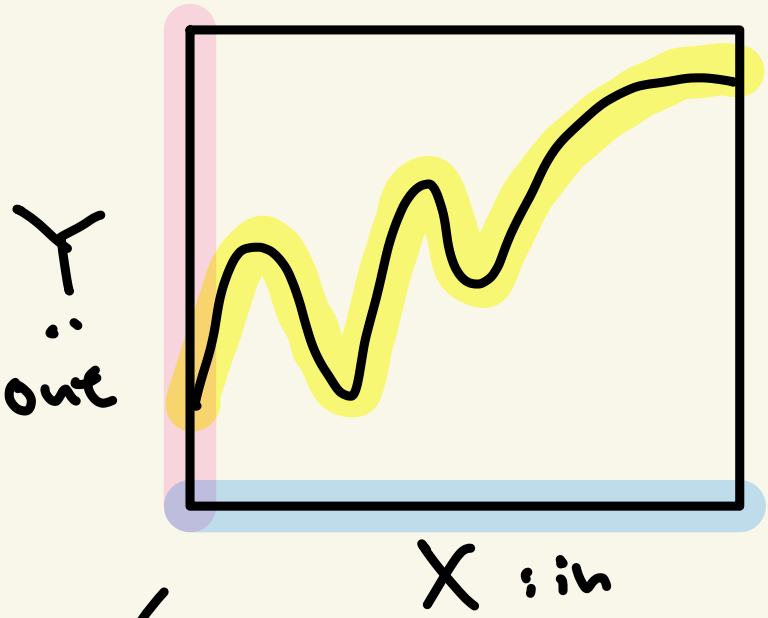


関係ナシ：$\neg(yRx)$

↑否定

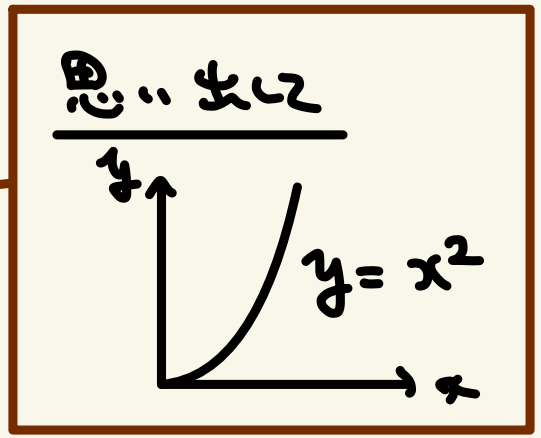
写像って？

$f : X \longrightarrow Y$



$X \times Y$の部分集合

f：fのグラフという。



函数は写像！
（関数）

① 入力 $x \in X$ に、

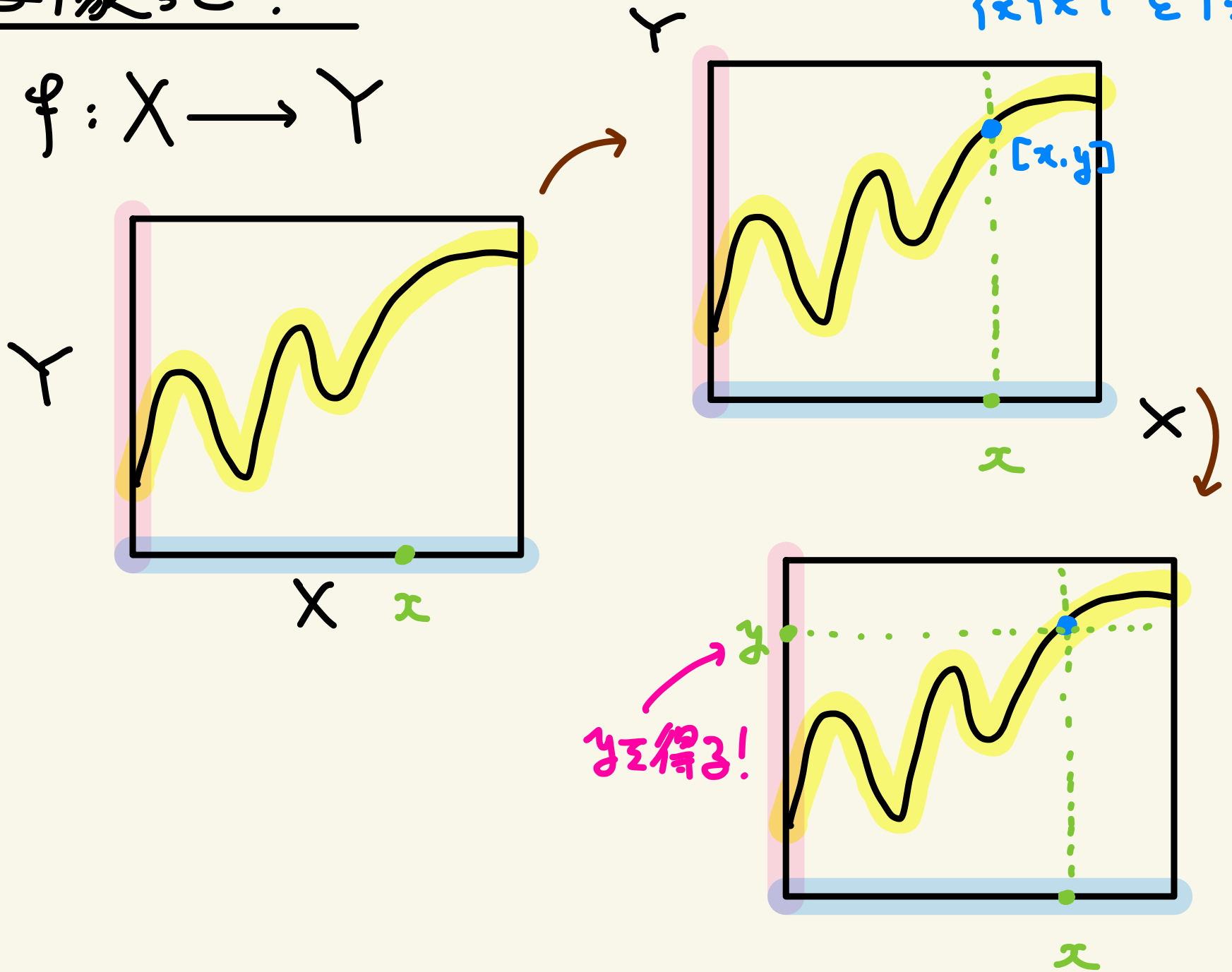
$y \in Y$ が f によって出力される。

$\hookrightarrow$ $y = f(x)$ と書くヨ。

- 左右に横切っていて、
- 要素に、"要素"が対応している。

写像って？

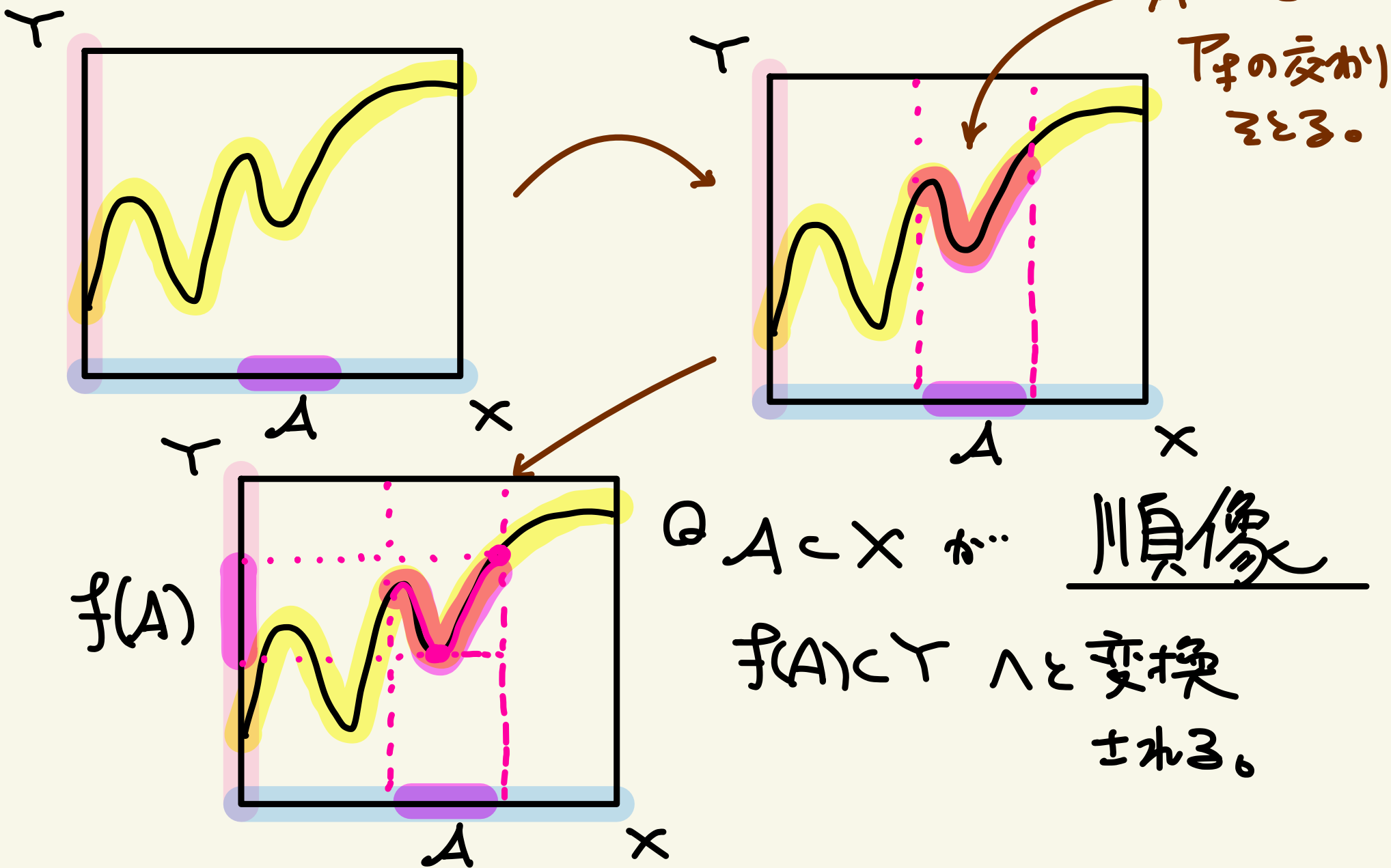
$f : X \longrightarrow Y$



$1 \times 1 \times Y$ と f の交点

写像と逆像

写像で"部分集合"を変換してみる。

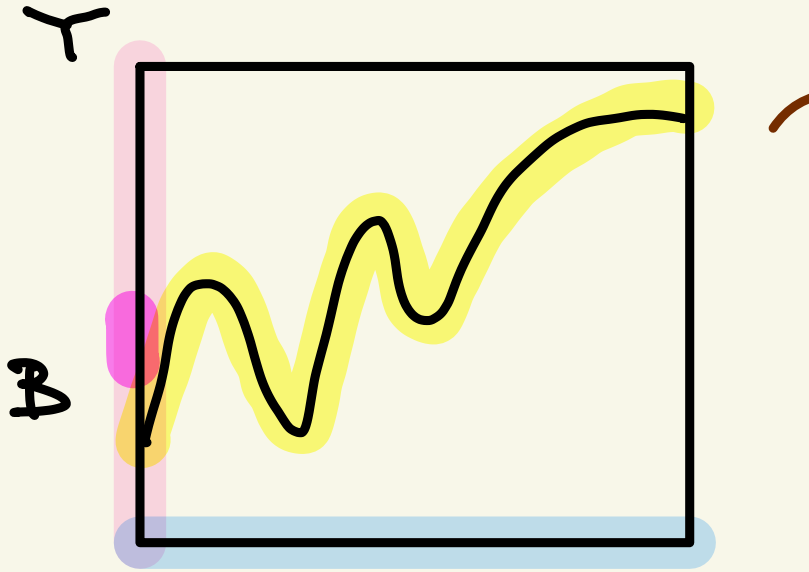


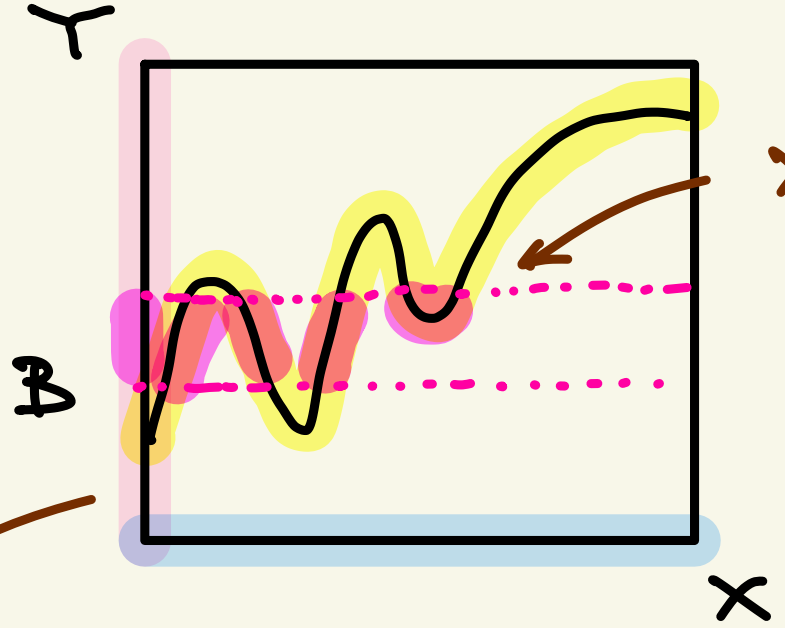
Q $A \subset X$ が… **順像**

$f(A) \subset Y$ へと変換される。

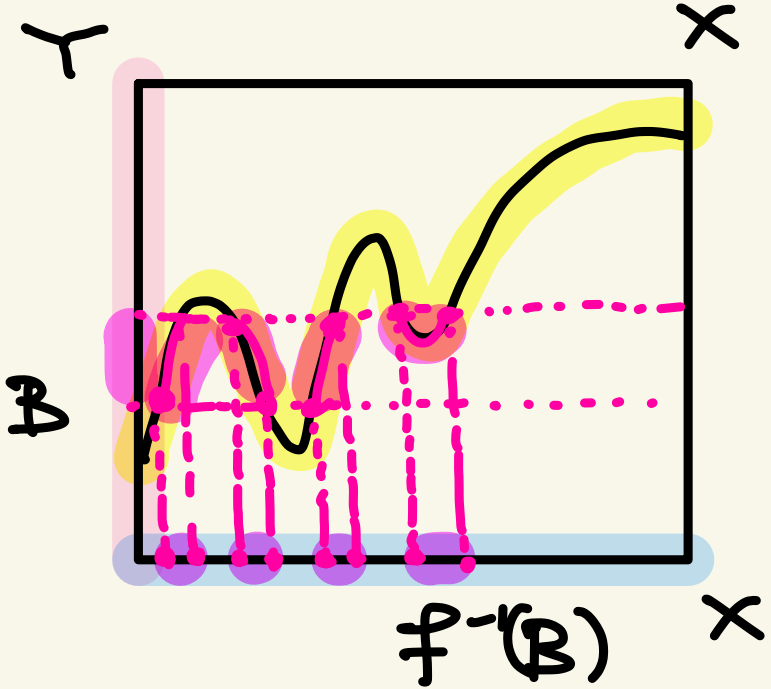
写像と逆像

写像で"部分集合"を変換してみる。





X∩Bと
Yの交わり。



QBcYが…

f⁻¹(B)cXへと変換される。

逆像

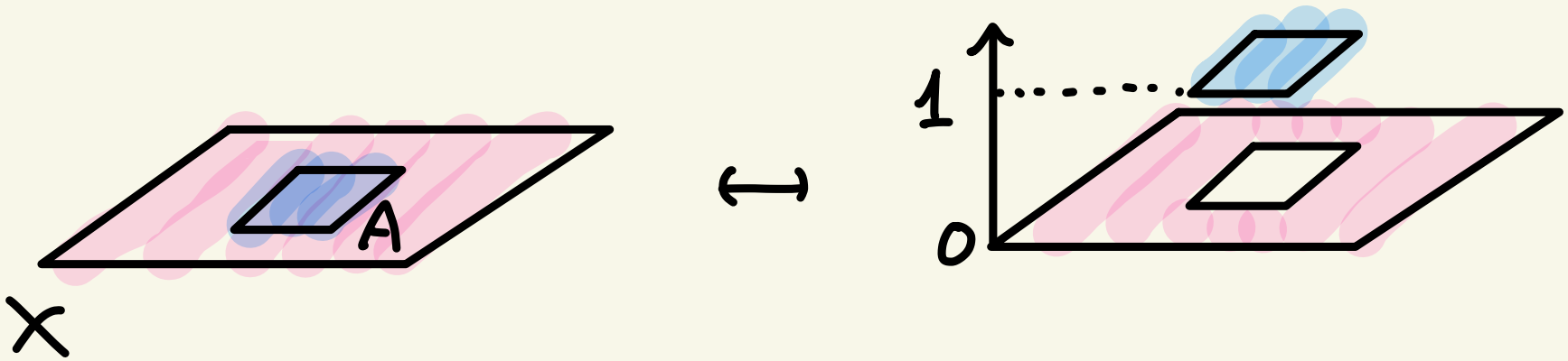
特性函数

※世界観を転換していく。

・部分集合って"ベクトル"的

特性函数と言うヨ。

χ_A : 0, 1 に値をとる函数。



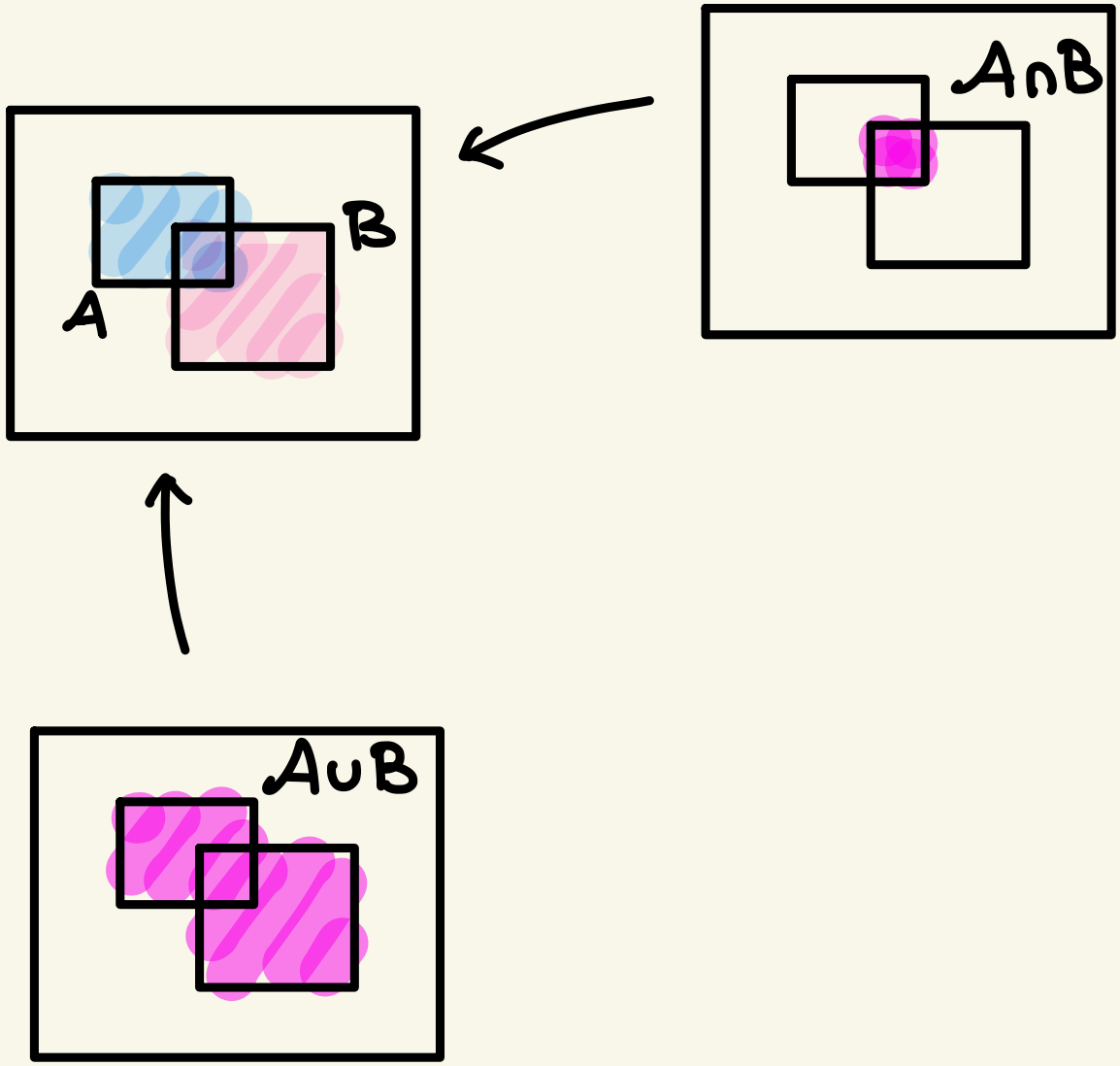
$X = ? \cdots\cdots ?$ ⟶ 部分集合たち

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bit表現みたいな。

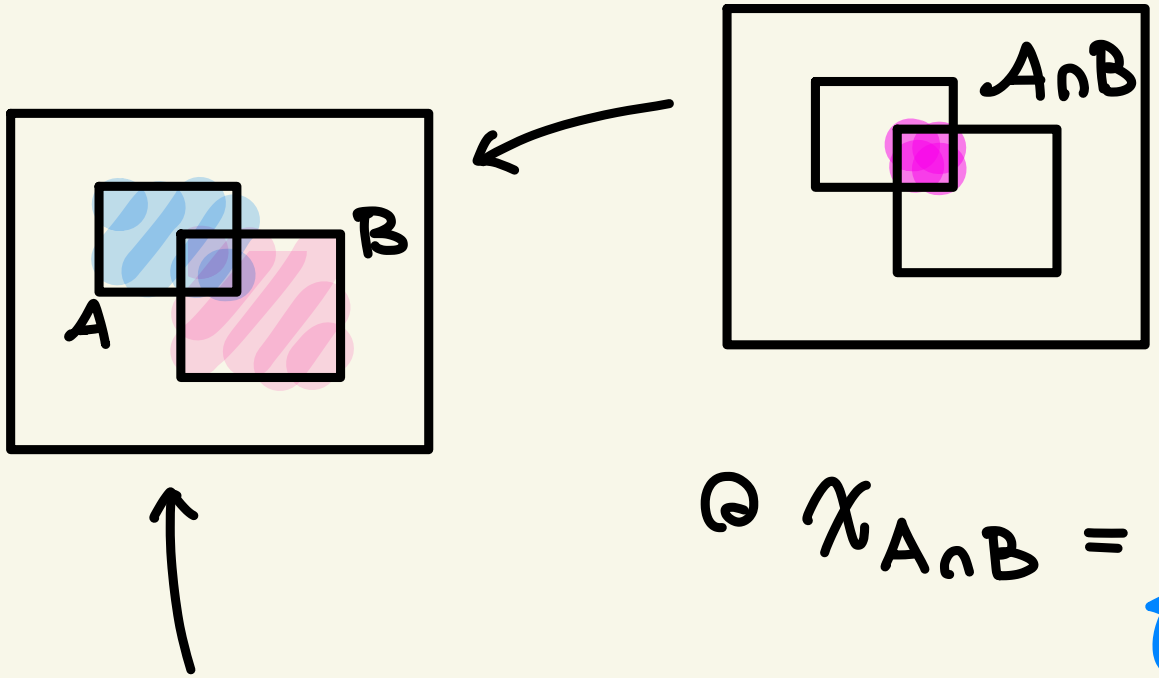
特性函数

部分集合の和と交叉



特性函数

部分集合の和と交叉



{0, 1}の算法

$$\vee \begin{cases} 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1 \\ 0 \vee 0 = 0 \end{cases}$$

$$\wedge \begin{cases} 0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \\ 1 \wedge 1 = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{Q}\ \chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$$

↑ $x \in A$ かつ $x \in B$ の時だけ 1！

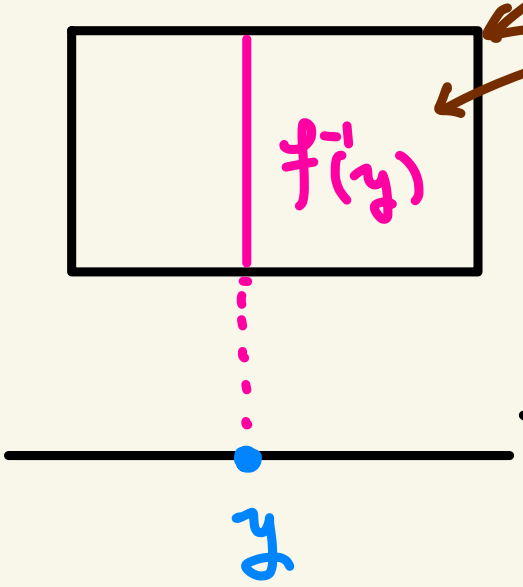
$$\textcircled{Q}\ \chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$$

↑ $x \notin A$ かつ $x \notin B$ の時だけ 0！

写像のファイバー

惑わないで！ X×Yではなく、X

正確には $f^{-1}(\{y\})$



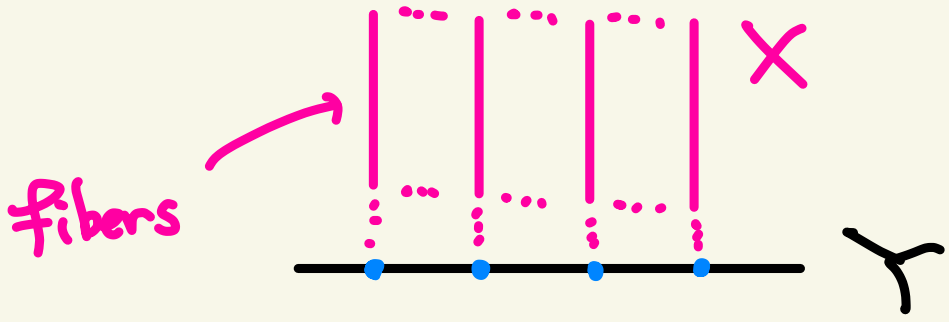
真下へと落とす写像

fで出力するとyになる要素の集合を、

「fのyにおけるファイバー」と言う。

☆世界観

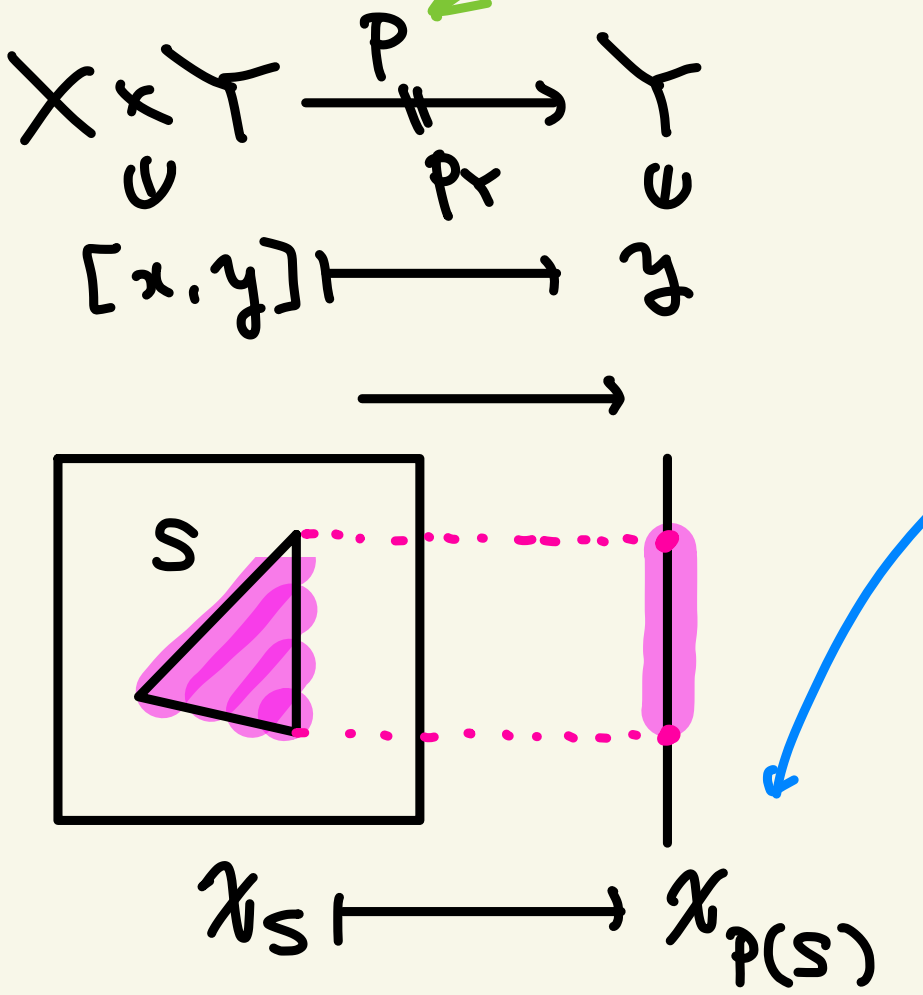
Xは、Yに沿って、fのファイバーを束ねたもの。



ファイバーは刻々と変化してもok!!

射影とファイバー和

projection の p



次のように計算できる。

Σのバー版

$$\chi_{p(S)}(y) = \bigvee_{x \in X} \chi_S([x,y])$$

pのファイバー：X × {y}
に渡る和

(= $p_*(\chi_S)$ と書いてみたり。)

行列算術

※世界観の転換。

・写像って行列：順像

$$\chi_{T_f}([x,y]) = \begin{cases} 1 & (y = f(x)) \\ 0 & (y \neq f(x)) \end{cases}$$

$$\chi_{f(A)} = R_{T*}\left(\chi_{T_f} \wedge \underline{P_X^{-1}(\chi_A)}\right) = \chi_{A\times Y}$$

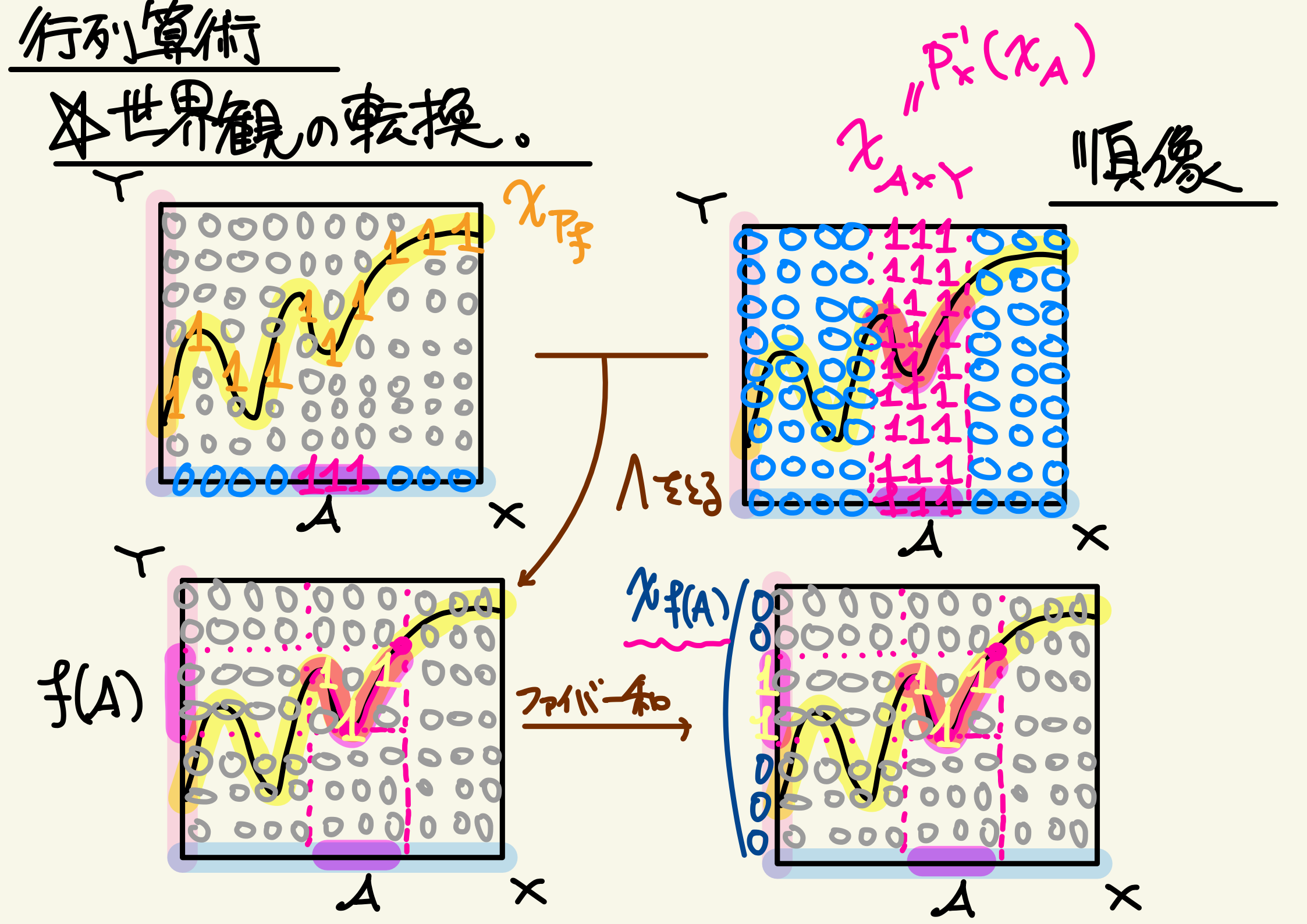
各点…毎には…

$$\chi_{f(A)}(y) = \bigvee_{x\in X} \chi_{T_f}([x,y])\ \underline{\chi_A(x)} = \chi_{A\times Y}([x,y])$$

行列とベクトルに作用するのと同じ形！

行列算術

※世界観の転換。



行列算術

☆世界観の転換。

・写像って行列：逆像

$$\chi_{f^{-1}(B)} = p_{X*}\left(\chi_{R_f} \wedge \underbrace{p_Y^{-1}(\chi_B)}_{=\chi_{X\times B}}\right)$$

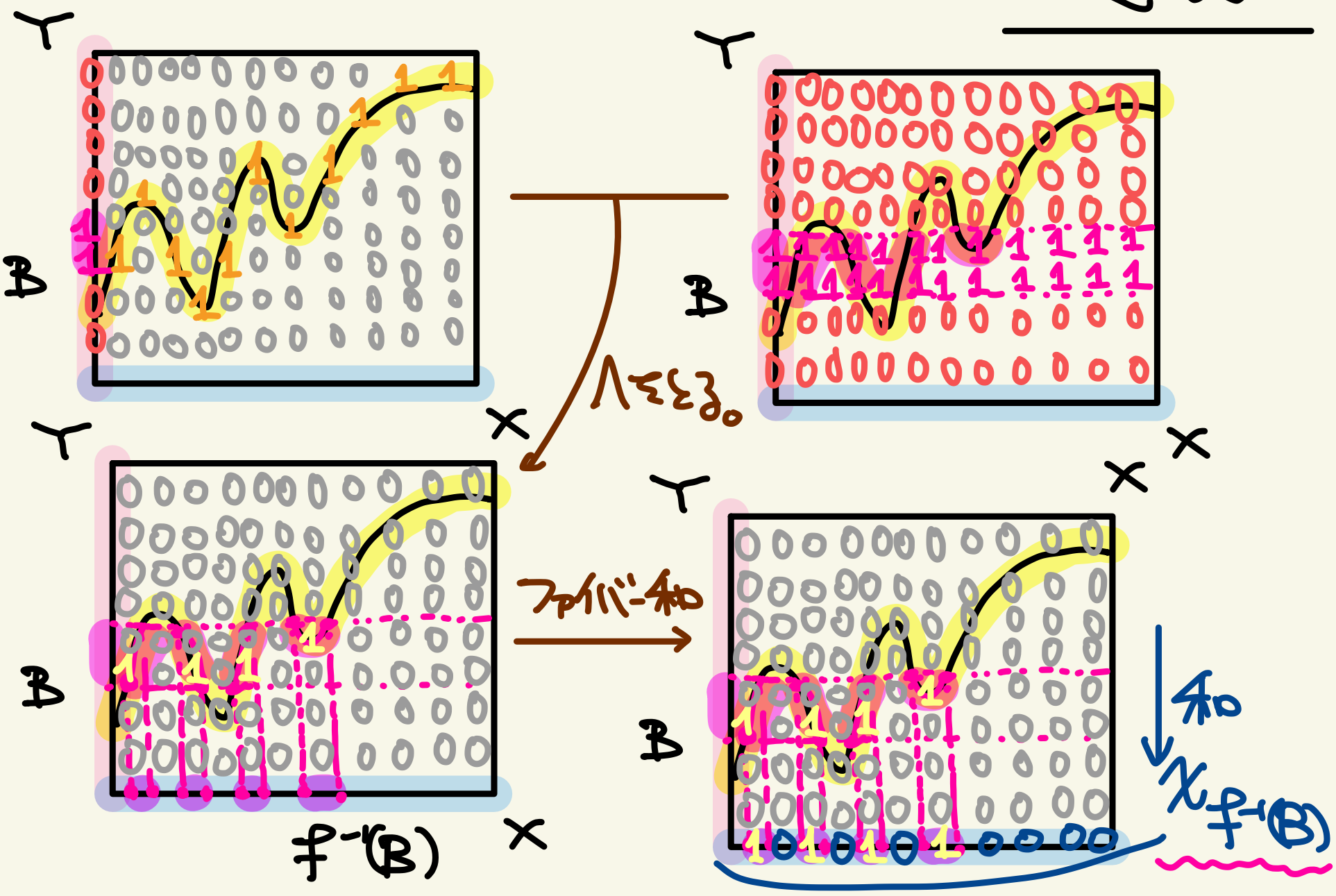
各点…毎には…

$$\chi_{f^{-1}(B)}(x) = \bigvee_{y\in Y} \chi_{R_f}([x,y])\,\underbrace{\chi_B(y)}_{=\chi_{X\times B}([x,y])}$$

転置行列とベクトルに作用するのと同じ形！

行列算術

※世界観の転換。



随伴

※世界観の転換。

① 要素中心の世界観 ⇝「入力→出力」の一方向的。

↓

② 特性(函数)中心の世界観 ⇝ 双方向的。

KeyWord：随伴

このような双方向性のこと。

（これから詳しく見る。）

随伴

ベキ集合

Power

X上のベクトル空間的な。

$P(X) = \{\text{部分集合} \subset X\} \overset{1:1}{=} \{\text{特性函数}\}$

Q $f : X \longrightarrow Y$

$\rightsquigarrow$ $P(X) \underset{f^{-1}}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} P(Y)$ という写像の対が生じている。

随伴

$A \subset X$ と $B \subset Y$ について.

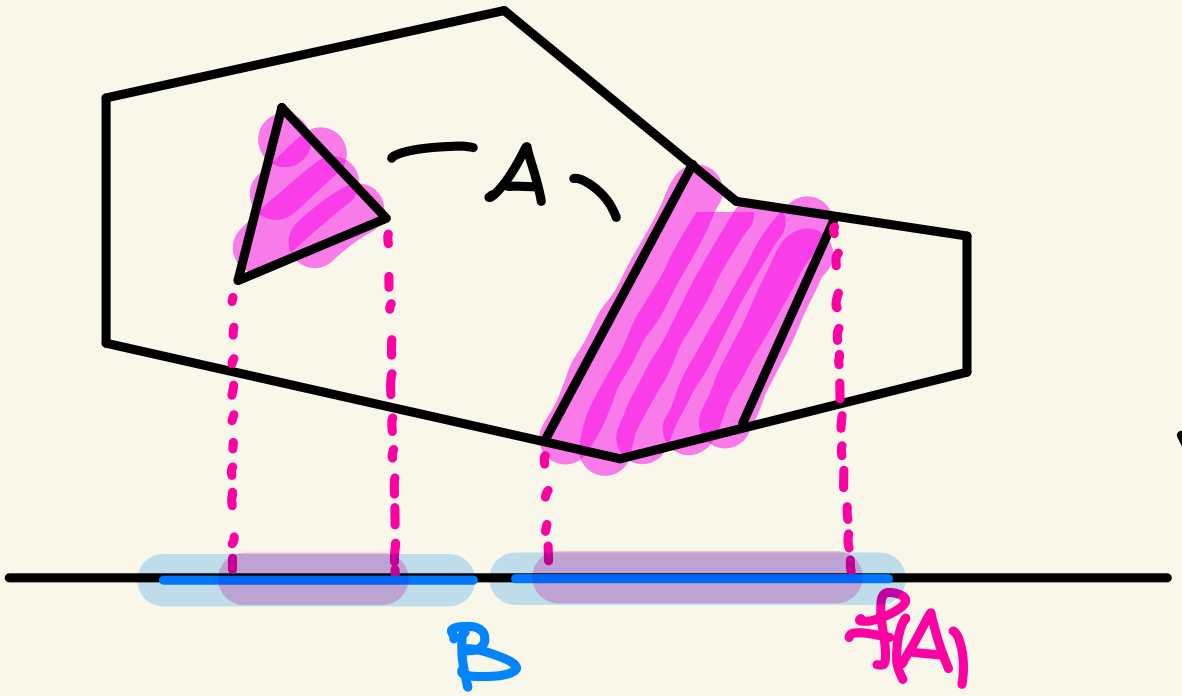
$(A \in P(X))$ $(B \in P(Y))$

- 「$f_*(A) \subset B$」であることと、

「$A \subset f^{-1}(B)$」であることは同値。

（随伴の例。）

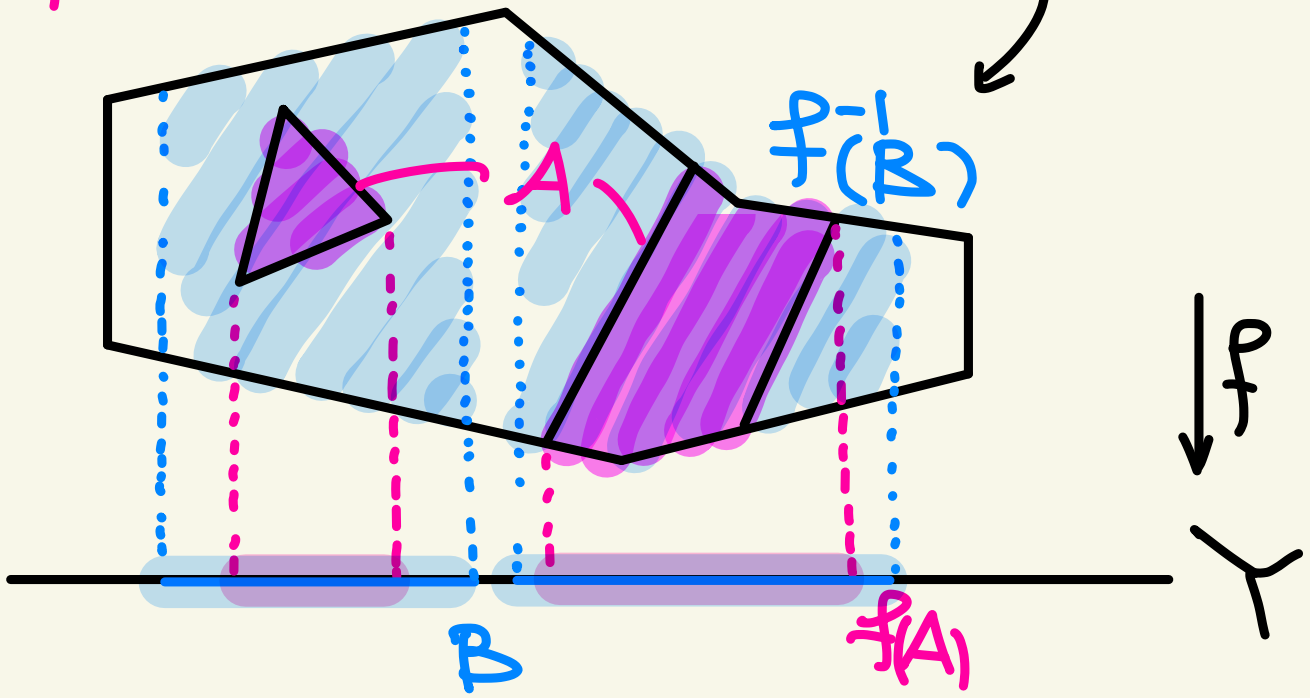
随伴



$A \subset f^{-1}(B)$ と

$f(A) \subset B$

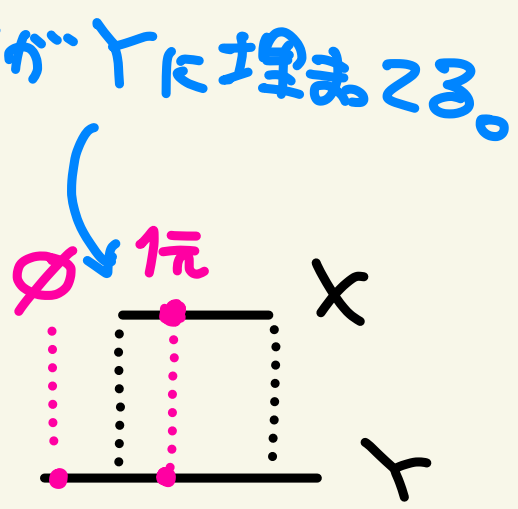
が同時に成立。



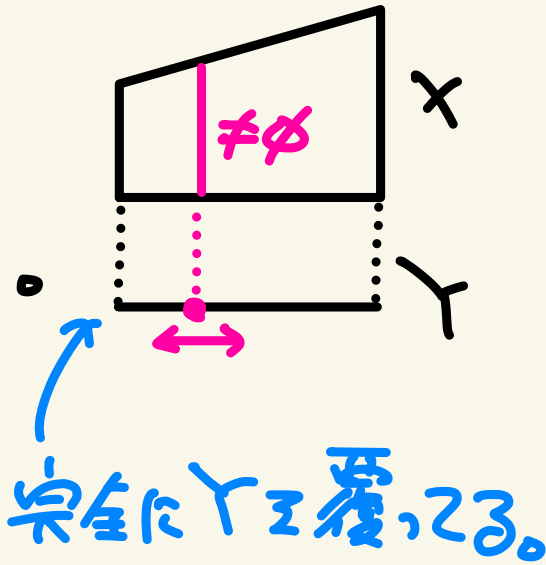
緒概念

$f: X \longrightarrow Y$ が....

- 単射：ファイバーが$\emptyset$か1元集合。

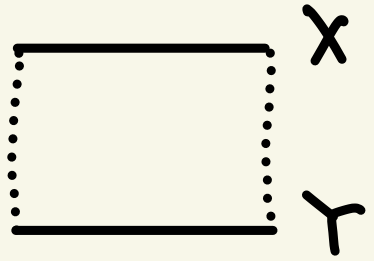


- 全射：ファイバーが全て$\emptyset$でない。



- 全単射：ファイバーが全て 1元。

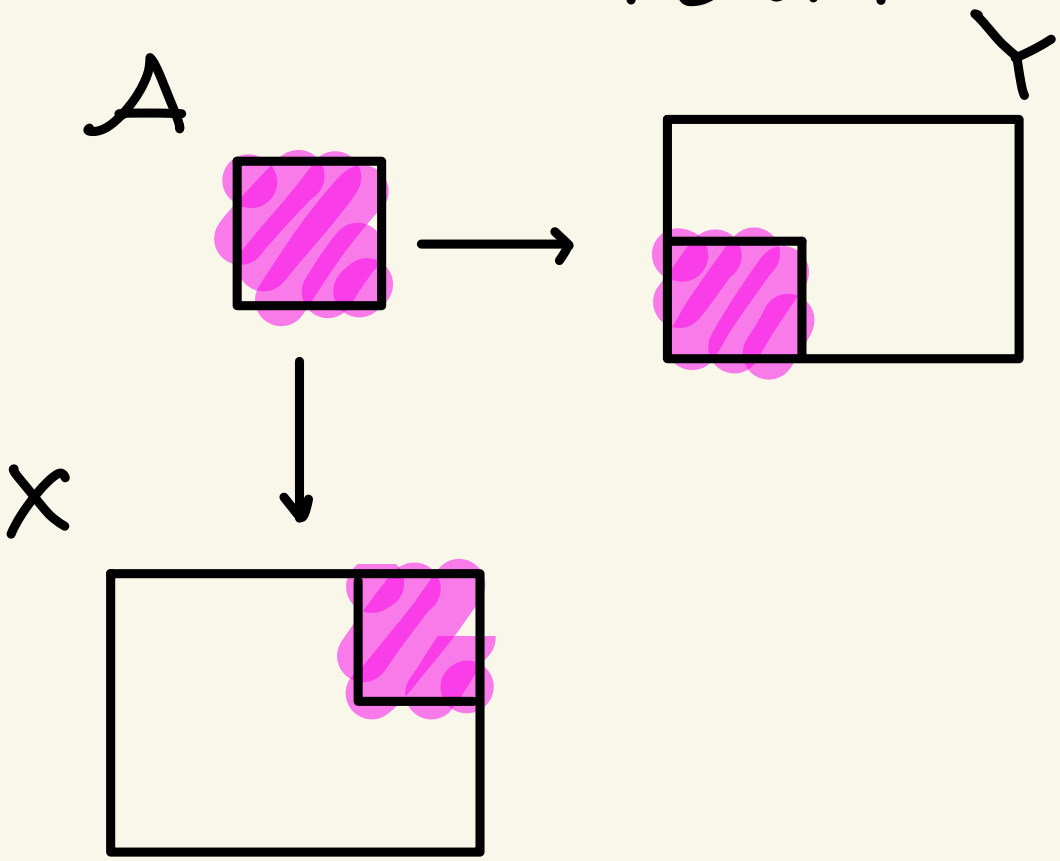
同じ形！→



集合のpushout

pushout？

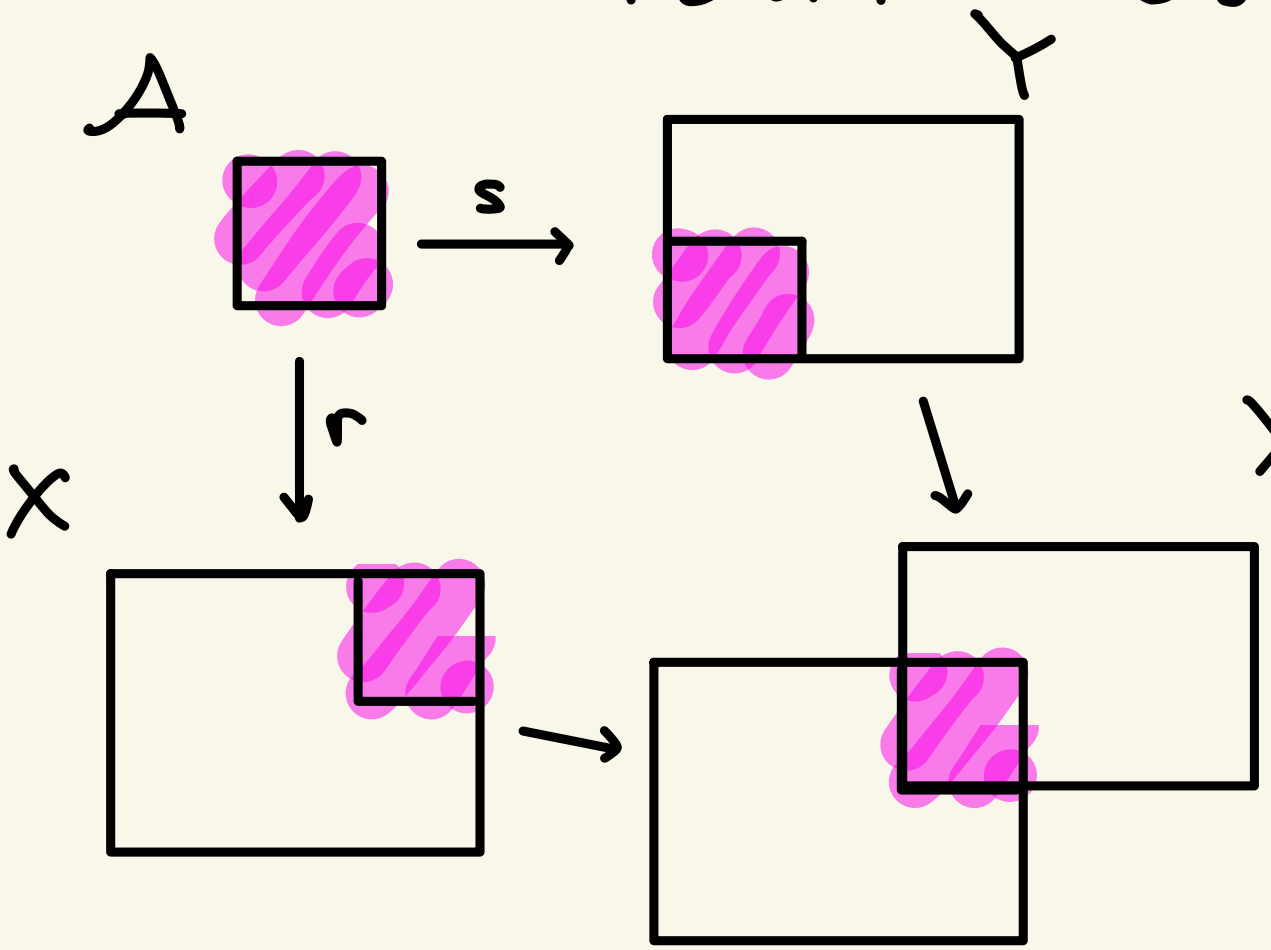
→ のりしろで集合の和をとる。



集合のpushout

pushout？

→ のりしろで集合の和をとる。



※
$x \in X$, $y \in Y$ について.

$\exists a \in A$, $x = r(a)$

$y = s(a)$

となる時、$x \sim y$ とする。

※ $A = \emptyset$ なら.

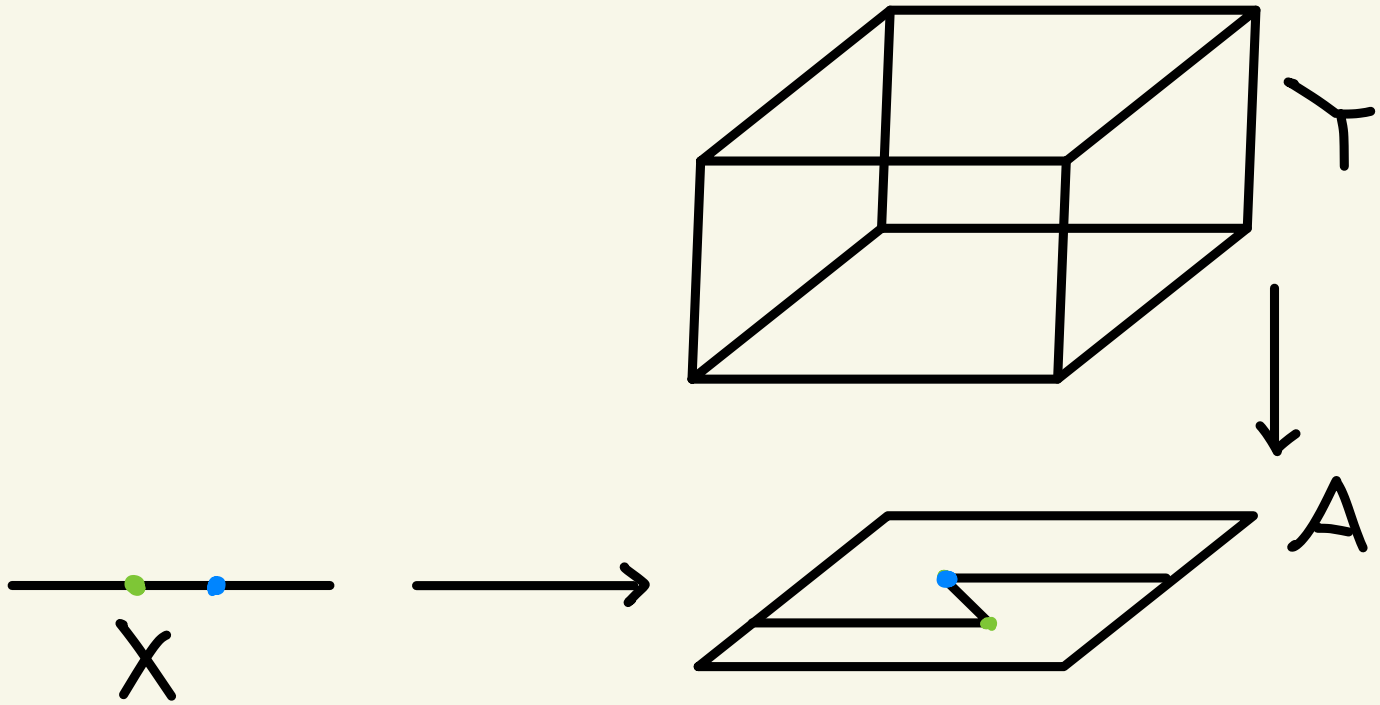
$X \sqcup_\emptyset Y = X \sqcup Y$

集合のpullback

pullback？

→ 条件付きで積をとる。

1/5



集合のpullback

pullback？

→ 条件付きで積をとる。

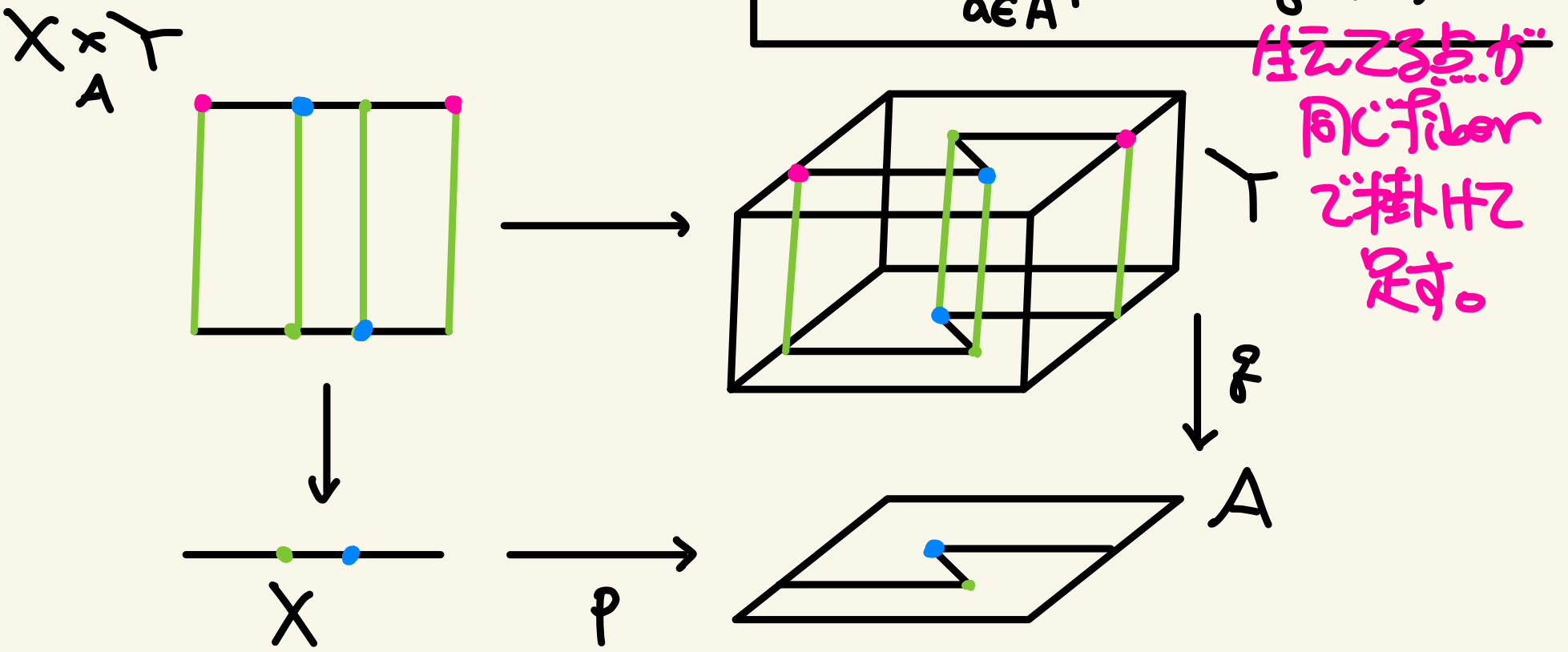
※ $X \times_A Y$

$\cup$

$X \times_A Y = \{[x,y] \mid p(x) = g(y)\}$

$= \bigsqcup_{a \in A} p^{-1}(a) \times g^{-1}(a)$

1/5



生えてる点が同じfiberで揃ってる。

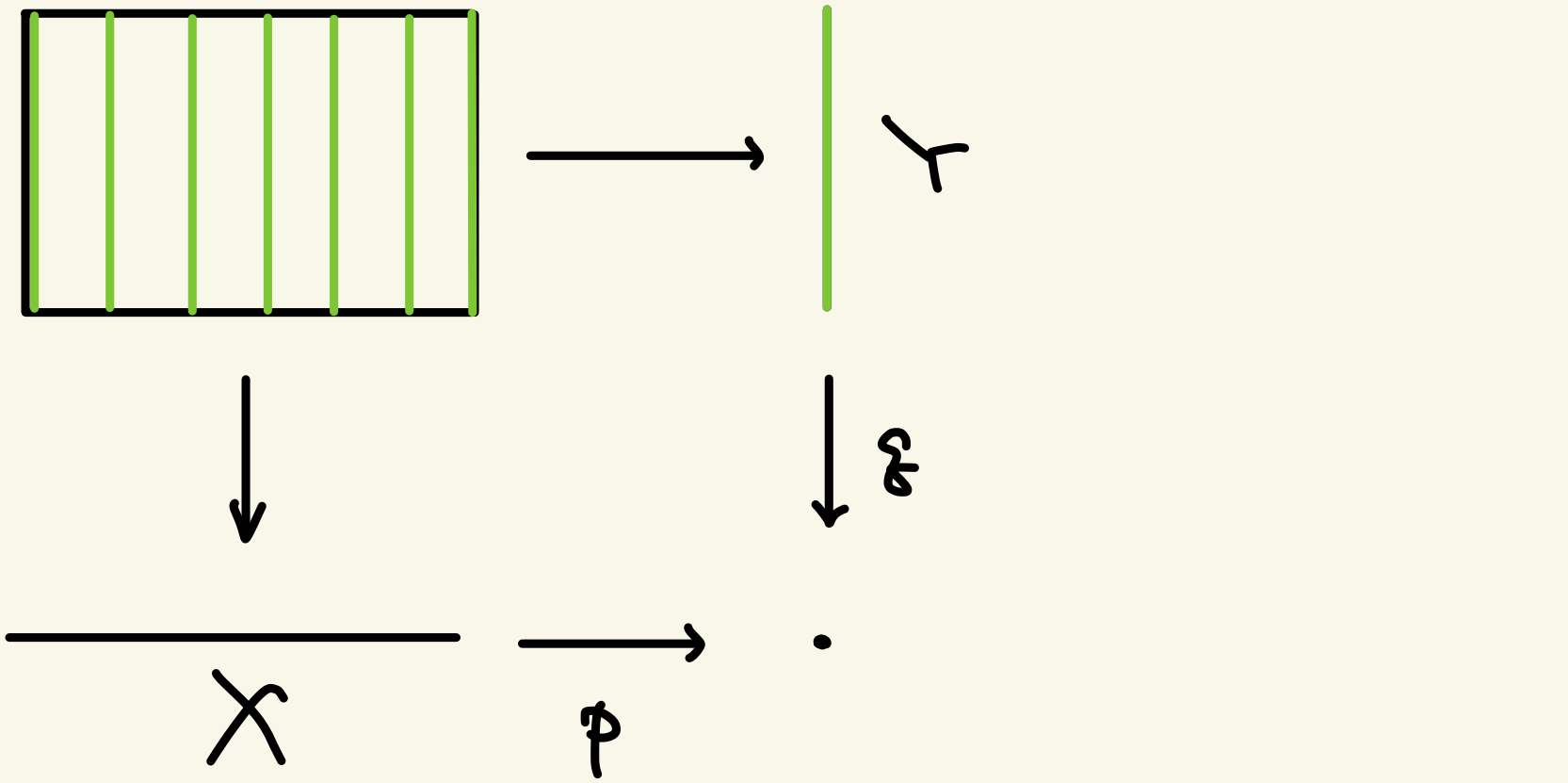
集合のpullback

pullback？

→ 条件付きで積をとる。

2/5

$X \times_Y Y = X \times Y$



Y = Xに沿って並べたやつ

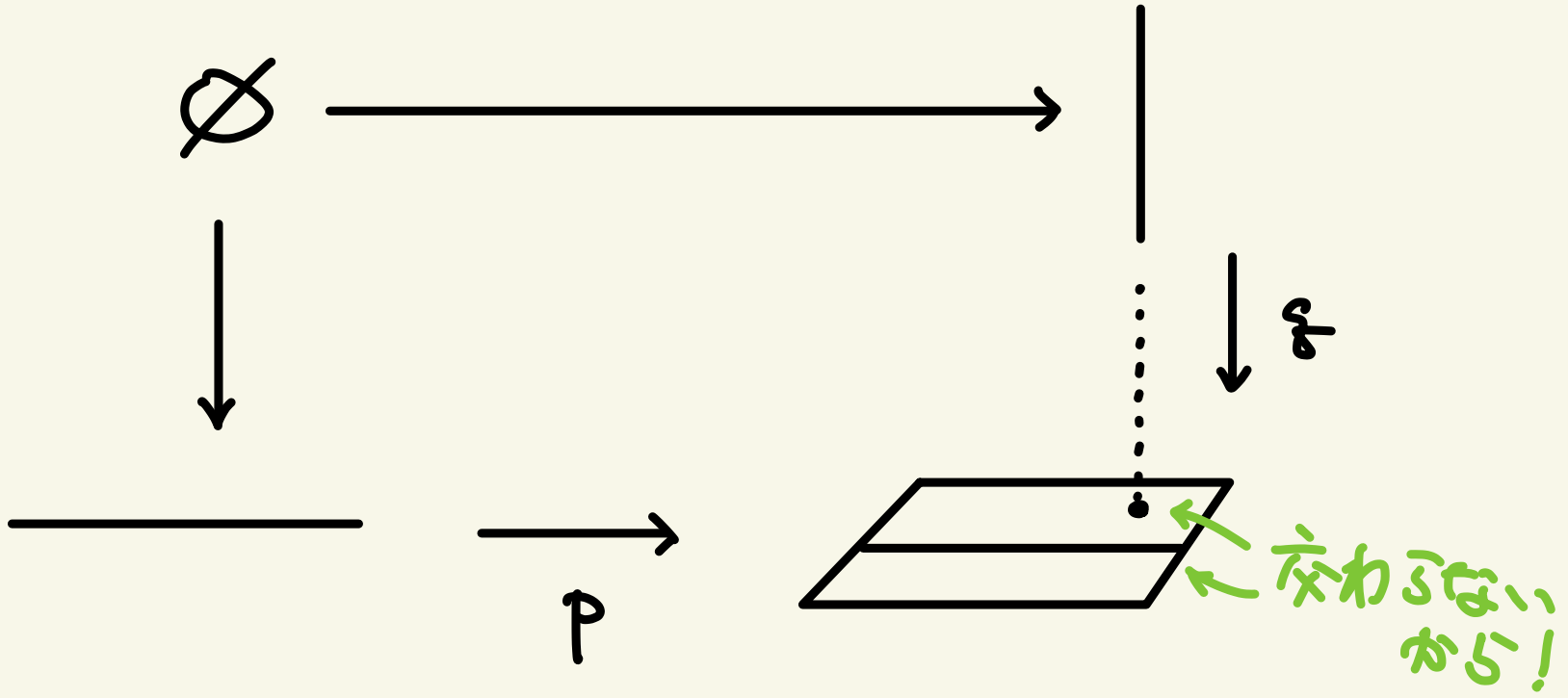
（X≠Y逆でもok）

集合のpullback

pullback？

→ 条件付きで積をとる。

3/5



集合のpullback

pullback？

→ 条件付きで積をとる。

4/5

$A \times_X B = A \cap B$

※

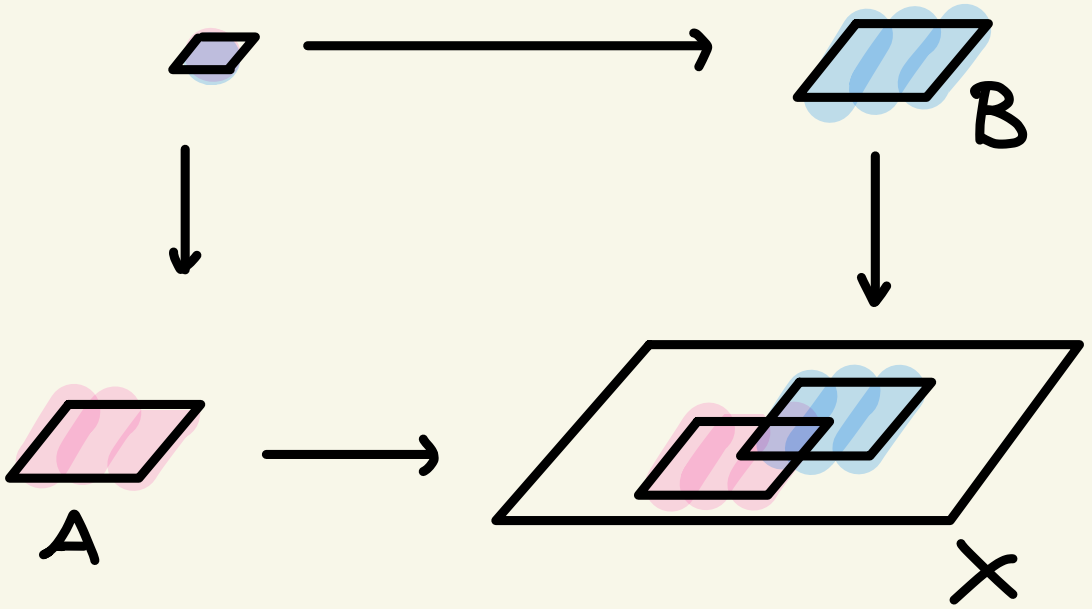
$A \times B$

∪

$\{[a.b] \mid a = b \in A \cap B\}$

=

$A \cap B$

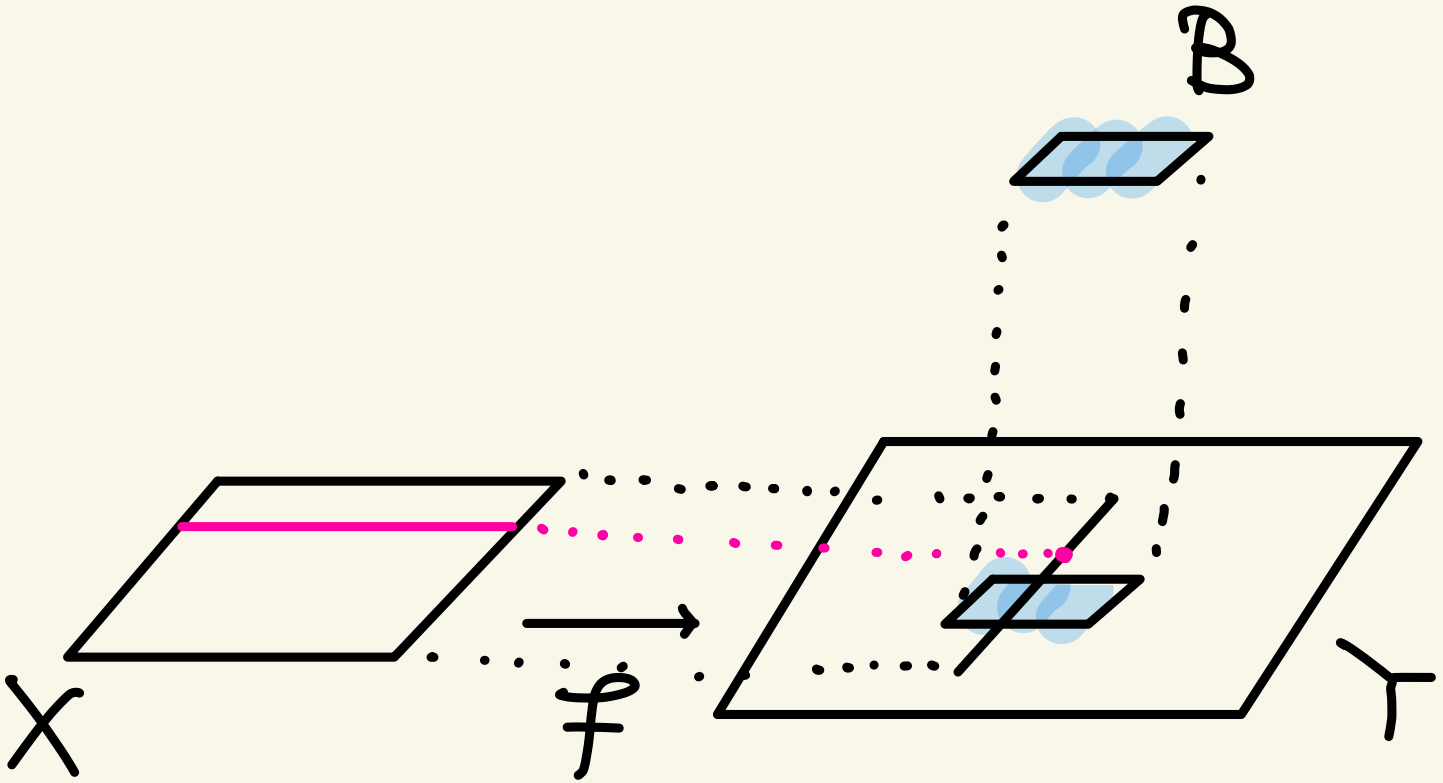


集合のpullback

pullback？

→ 条件付きで積をとる。

5/5



集合の pullback

pullback?

→ 条件付きで積をとる。

※ $X \times_Y B$

Y

$=$

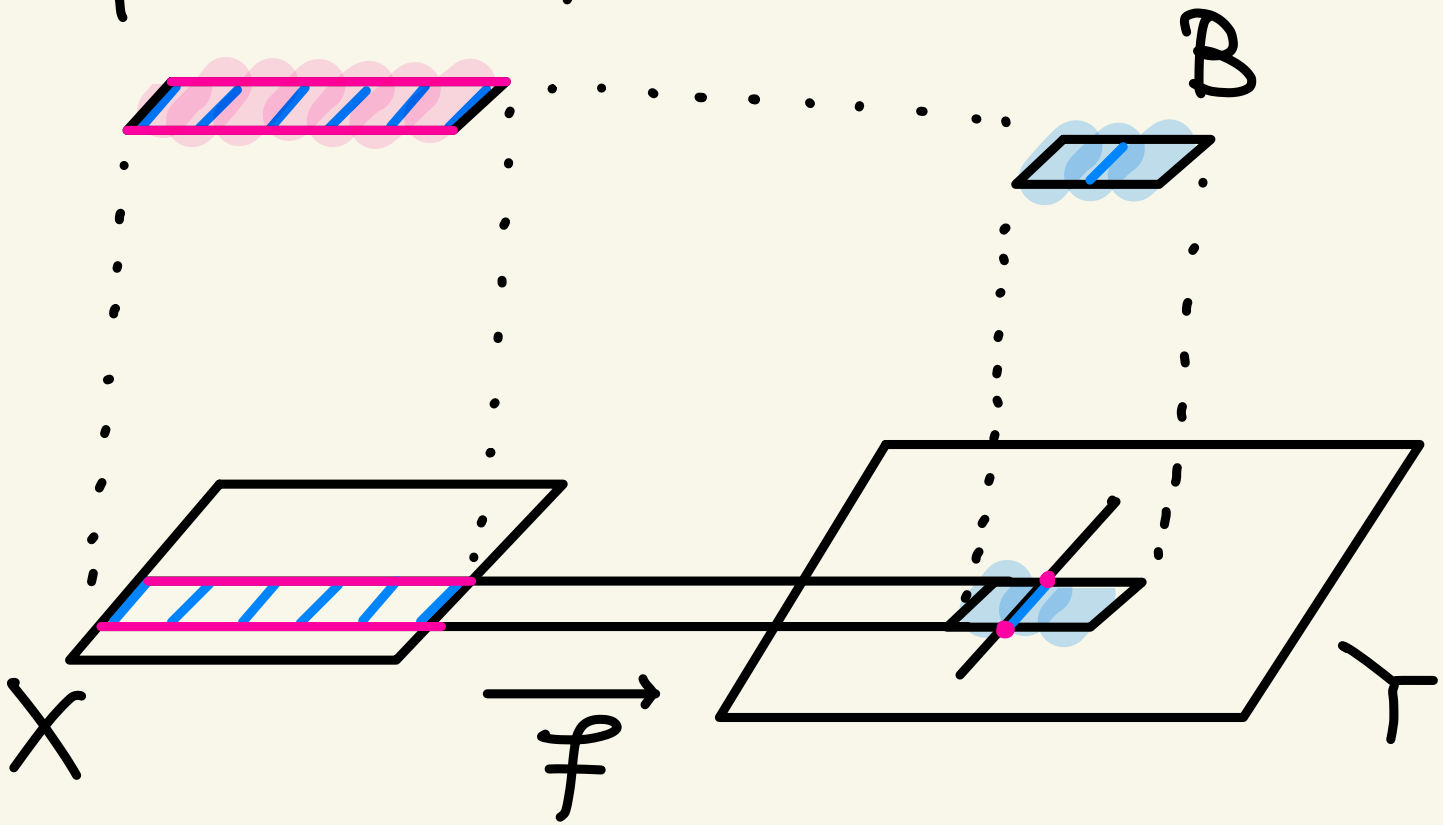
$\{[x,b] \mid f(x)=b \in B\}$

$=$

$f^{-1}(B)$

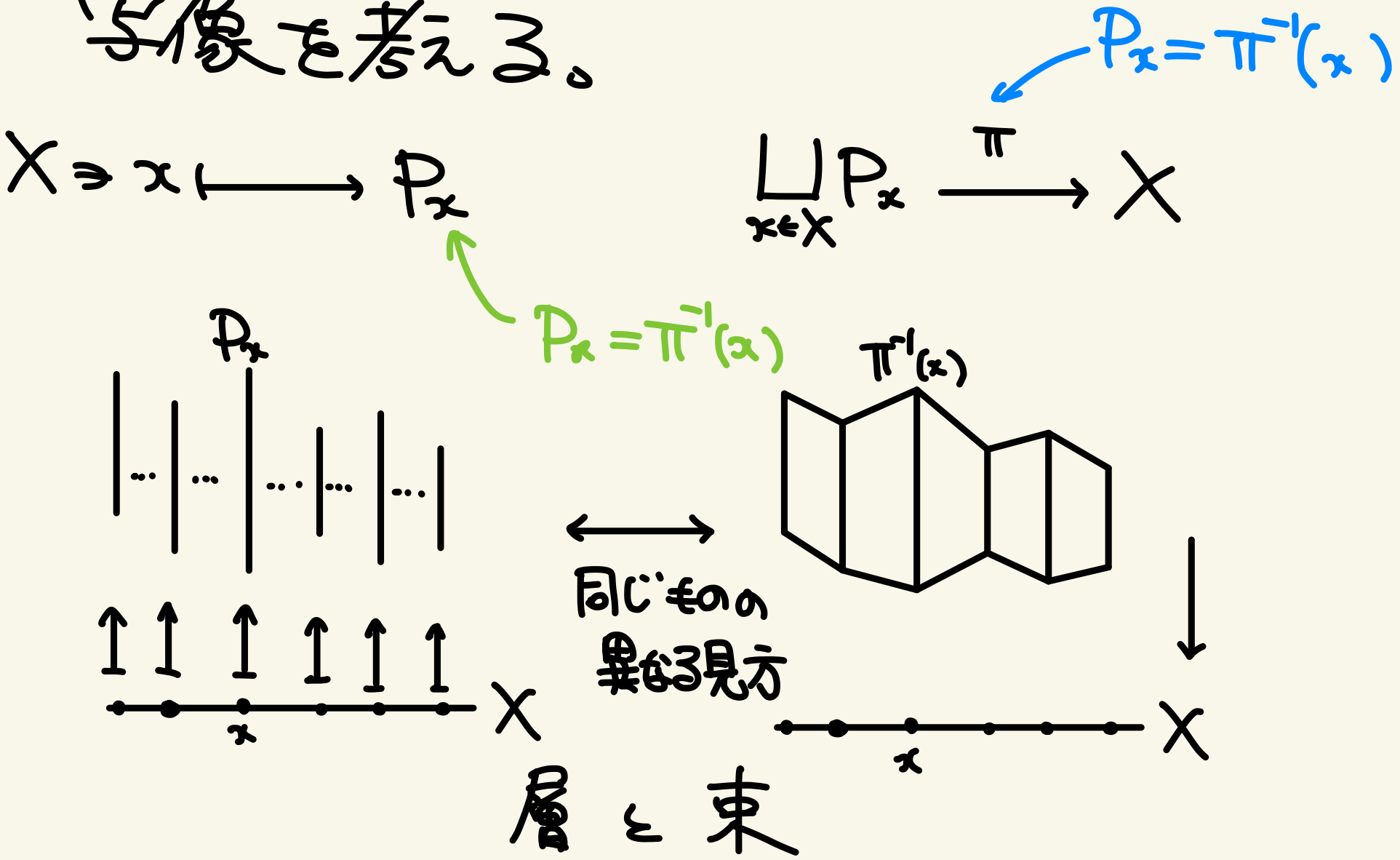
5/5

$X \times_Y B = f^{-1}(B)$



集合上の前層

☆集合Xから、「各点…に集合が対応する」写像を考える。



層と束

モノイド
と
ポセット

モノイドって？

$M=[M,m,e]$ ・二項演算がイイカンジにある。

$$\begin{cases} M\times M \xrightarrow{m} M \\ \psi \qquad\quad \psi \\ [x,y] \longmapsto xy \end{cases} \qquad \begin{cases} \cdot\ (xy)z = x(yz) \\ \cdot\ xe = ex = x \end{cases}$$

$$\{\ e \in M$$

モノイドって？

例

$\mathbb{N}$: 自然数 with 和 : $3+(2+1)=6=(3+2)+1$

$4+0=4$

$\mathbb{N}$: 自然数 with 積 : $3\cdot(2\cdot 4)=24=(3\cdot 2)\cdot 4$

$5\cdot 1=5$

Mat_n : 行列 with 積 : $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

$A\cdot 1_n=A$

モノイドって？

例

Σ : alphabet (={a, b} とか)

文字列全体 : $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb \ldots\}$

ε ← 空文字列

- aaba · abba

  = aabaabba みたいな。

- abaε = aba

  ε ← 空

モノイドって？

例

$P(X)$: ベキ集合 with 和

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\cup$

$A = \{0, 1\}$

$\cup$

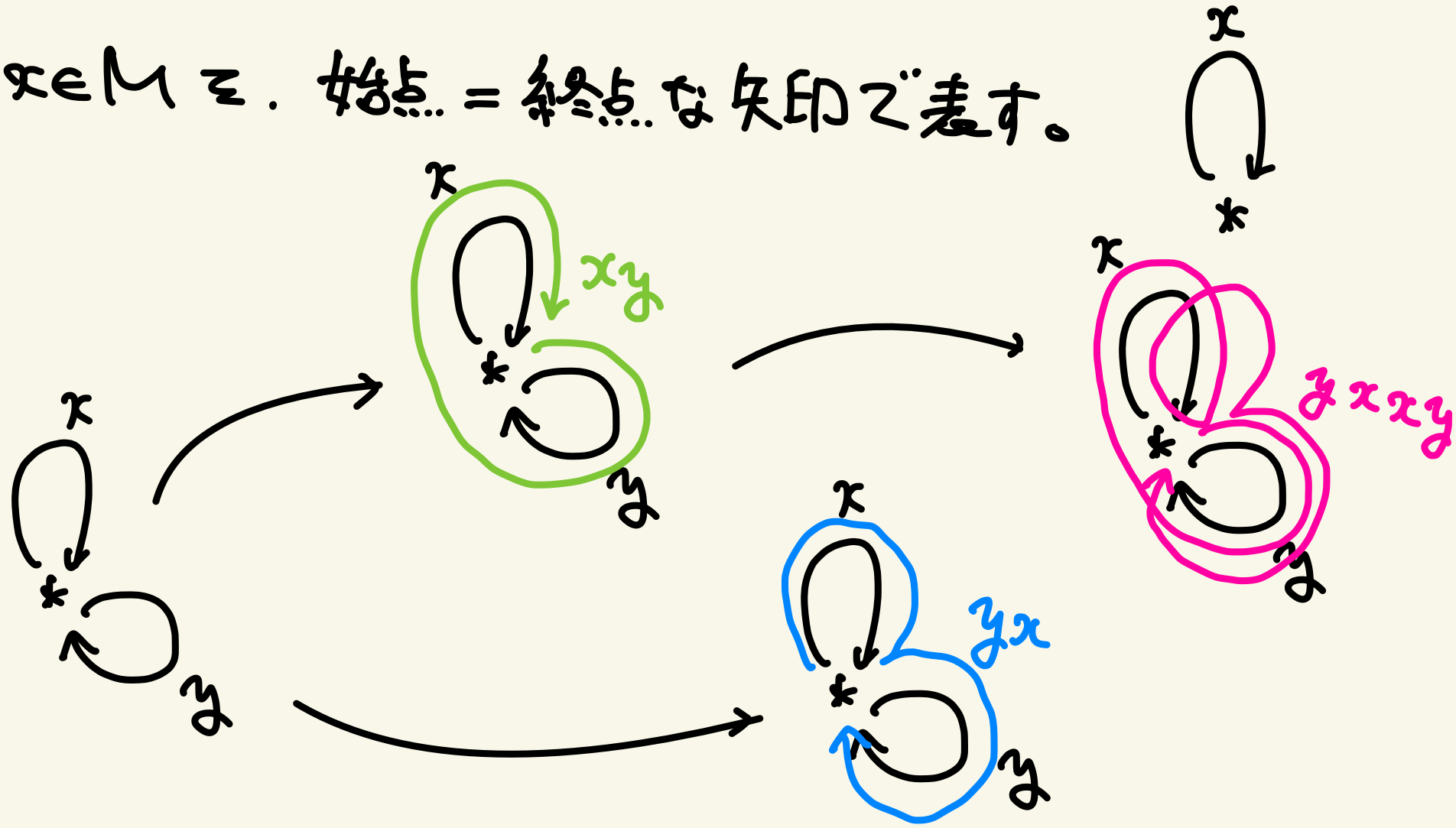
$B = \{1, 2, 4\}$

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$
- $A \cup \emptyset = A$

モノイドって？

カテゴリカルにビジュアライズ。

$x \in M$ を、始点＝終点な矢印で表す。



ポセットって？

$P=[P, \leq]$: ポセット（Partially Ordered Set 半順序集合）

$P \times P$

$\cup$

$\leq_P$: P上の関係

- $x \leq x$ $\left([x,x] \in \leq_P\right)$
- $x \leq y$ かつ $y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq y$ かつ $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

ポセットって？

例

$\mathbb{N}$: with 大小 :
- $3 \leq 3$
- $4 \leq x$ かつ $x \leq 4 \Rightarrow x = 4$
- $5 \leq 6 \leq 8 \Rightarrow 5 \leq 8$

$\mathbb{N}_{>0}$: with 整除 : $3 \leq 6$, $3 \neq 5$

($a \mid b$: a が b を割り切る)

$\Updownarrow$

$a \leq b$

$2 \leq 6$

- $3 \leq 3 \Leftrightarrow 3 \mid 3$
- $4 \leq x \Leftrightarrow 4 \mid x$
  $x \leq 4 \Leftrightarrow x \mid 4 \Rightarrow x = 4$
- $2 \mid 4, 4 \mid 8 \Rightarrow 2 \mid 8$

ポセットって？

例

$P(X)$：べき集合 with 包含 ：$A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$

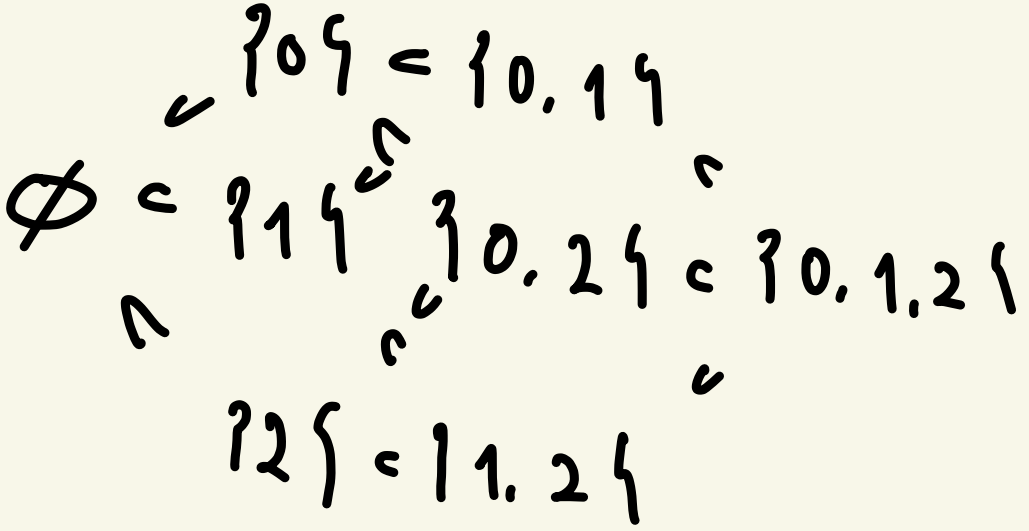
- $A \leq A \Leftrightarrow A \subset A$
- $A \leq B$, $B \leq A \Rightarrow A \subset B$, $B \subset A$ なので $A = B$
- $A \subset B$, $B \subset C$ $\Rightarrow A \subset C$

ポセットって？

例

$P(X)$：べき集合 with 包含 ：$A \leqq B \Leftrightarrow A \subset B$

$X = \{0, 1, 2\}$



- $A \leqq A \Leftrightarrow A \subset A$
- $A \leqq B$, $B \leqq A \Rightarrow A \subset B$, $B \subset A$ なので $A = B$
- $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

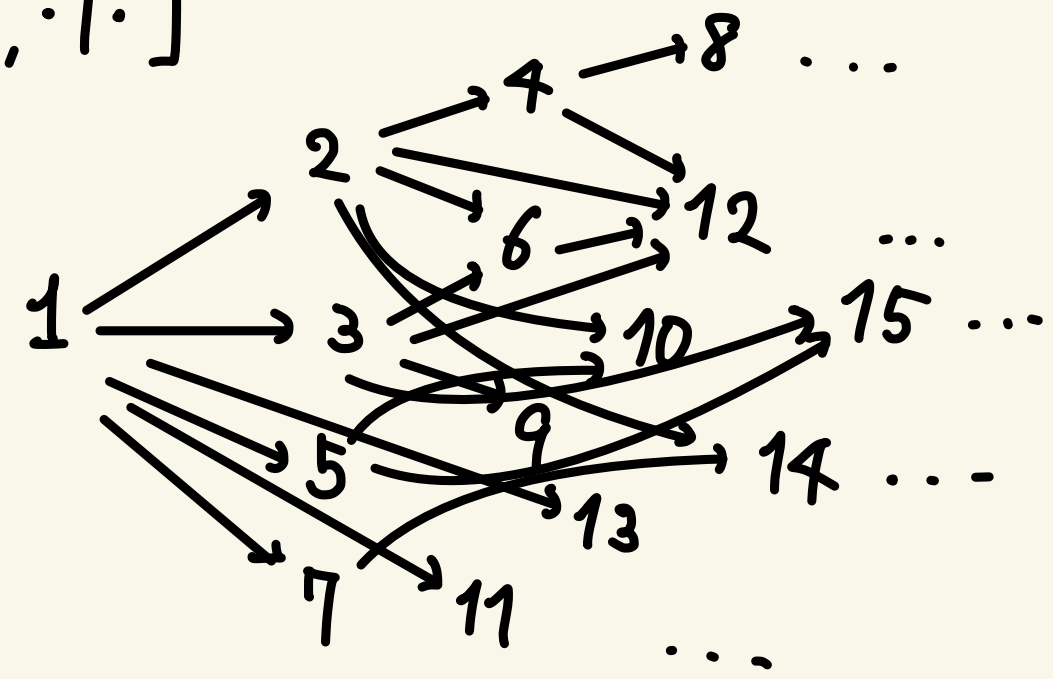
ポセットって？

カテゴリカルにモジュアライズ。

$[\mathbb{N}, \leq]$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow \cdots$$

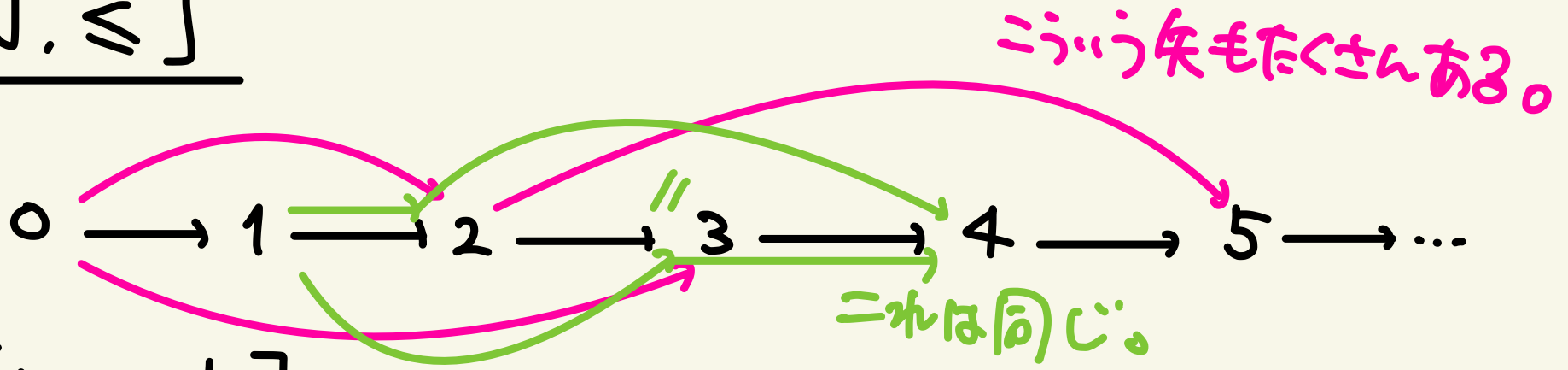
$[\mathbb{N}_{>0}, \cdot\,|\,\cdot]$



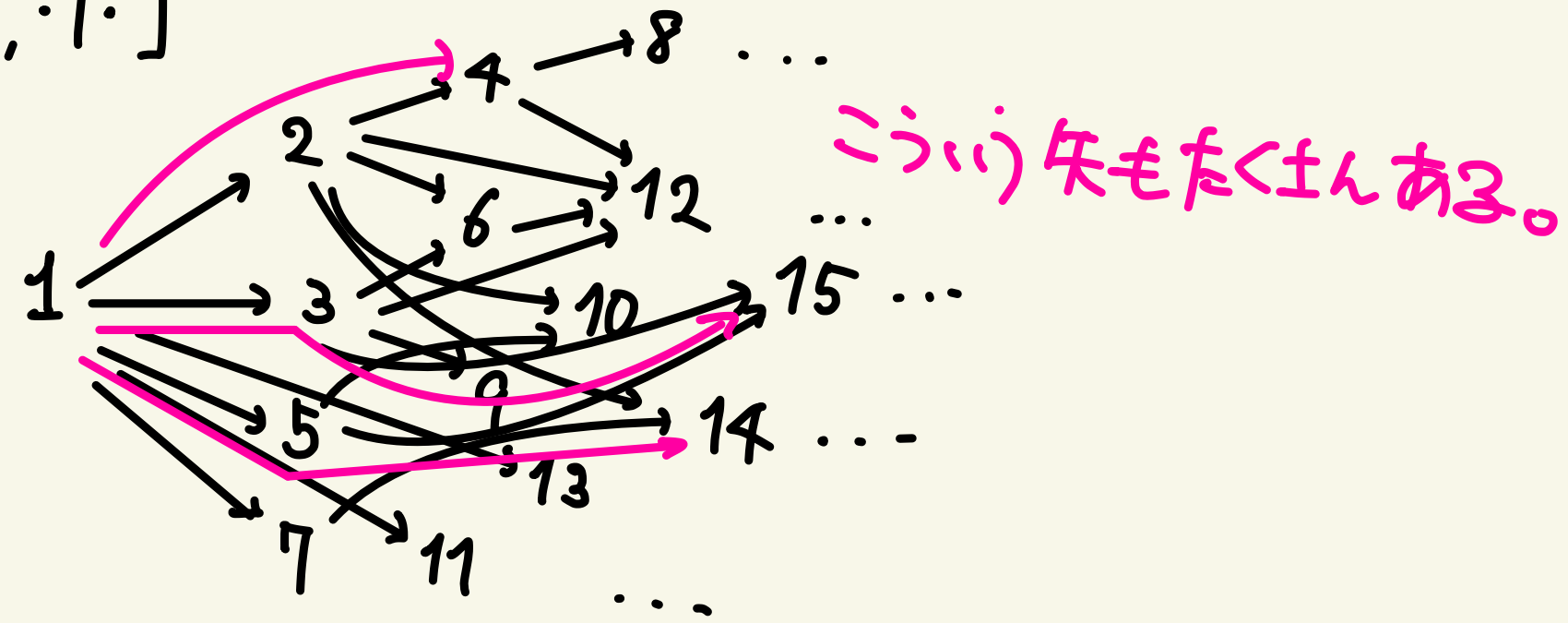
ポセットって？

カテゴリカルにビジュアライズ。

$[\mathbb{N}, \leq]$



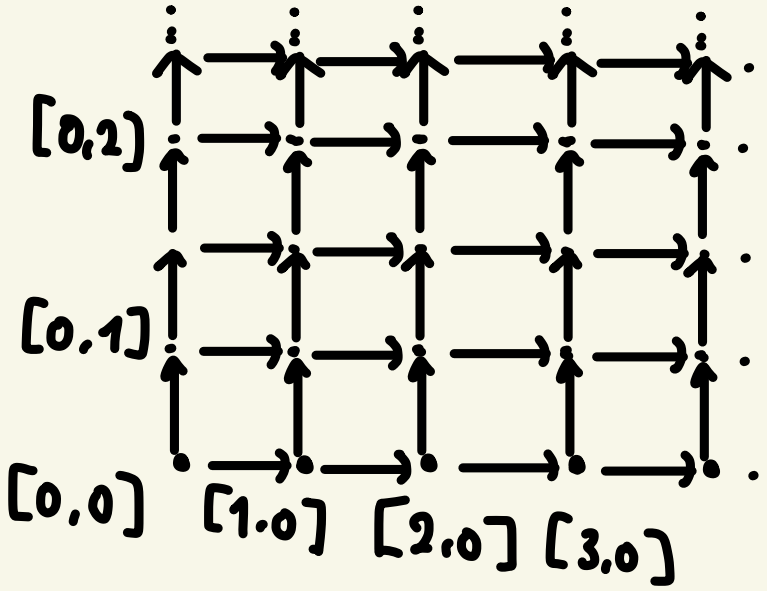
$[\mathbb{N}_{>0}, \cdot 1 \cdot]$



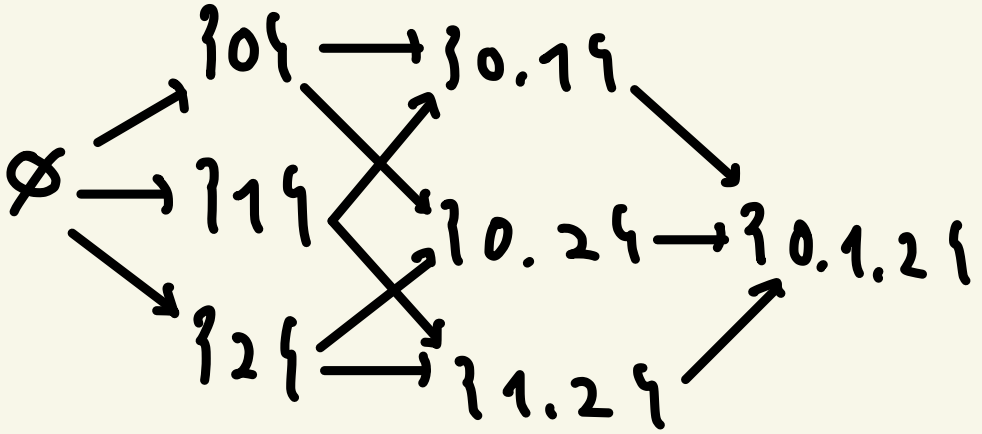
ポセットって？

カテゴリカルにビジュアライズ。

$[\mathbb{N}^2, \leq]$



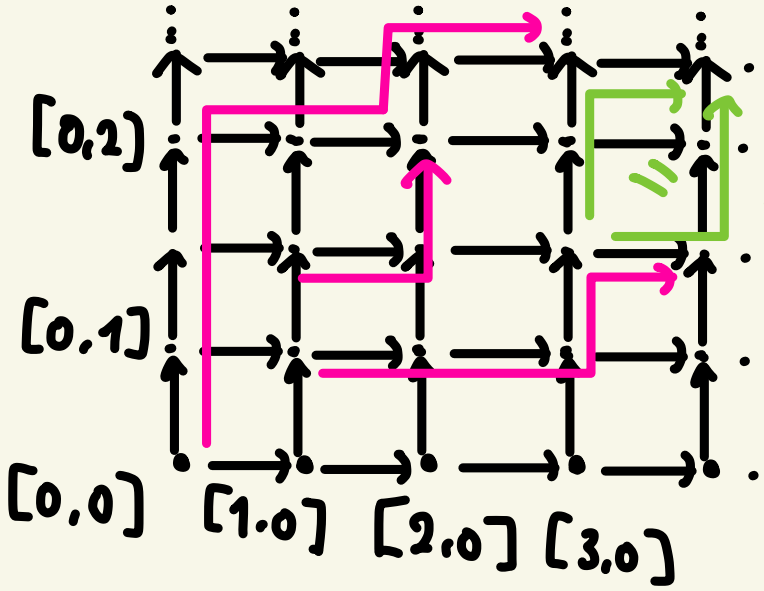
$[P(X), \subset]$



ポセットって？

カテゴリカルにビジュアライズ。

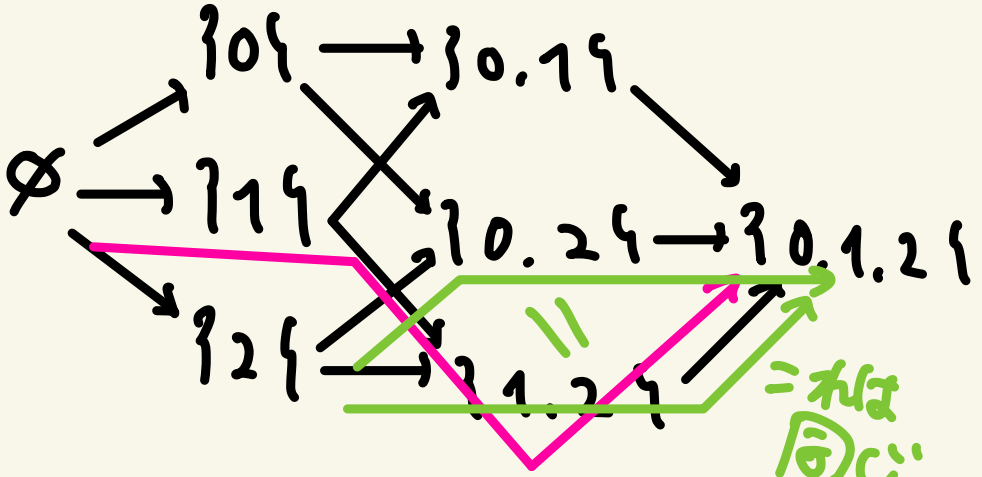
$[\mathbb{N}^2, \leq]$



これは同じ

こういう矢もある。

$[P(X), \subset]$



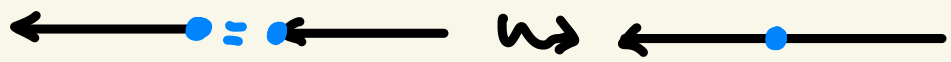
これは同じ

こういう矢とか。

モノイドとポセット

モノイドは全ての矢印が繋げる。

ポイントは……

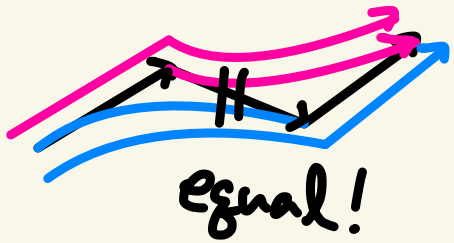


- 始点… = 終点… の矢印は繋げる。



- 繋げない矢印があってもいい。

- 繋ぐ順は何でも良い。



- 単位元 $\overset{e}{\underset{*}{\bigcirc}}$ $\overset{x \leq x}{\underset{x}{\bigcirc}}$ がある。

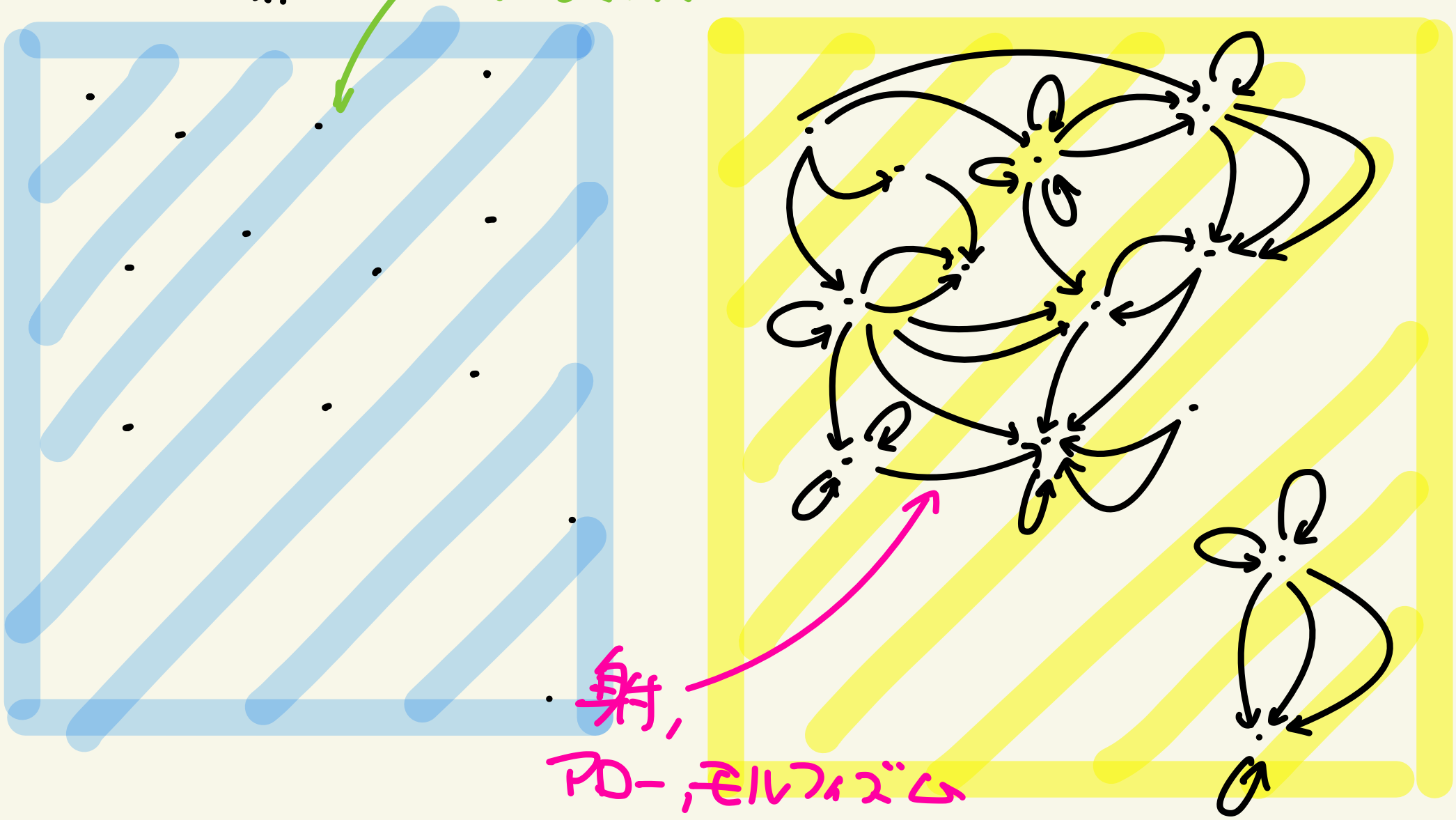
$x \leq x \leq y \Rightarrow x \leq y$

主題：圏論入門

カテゴリー？

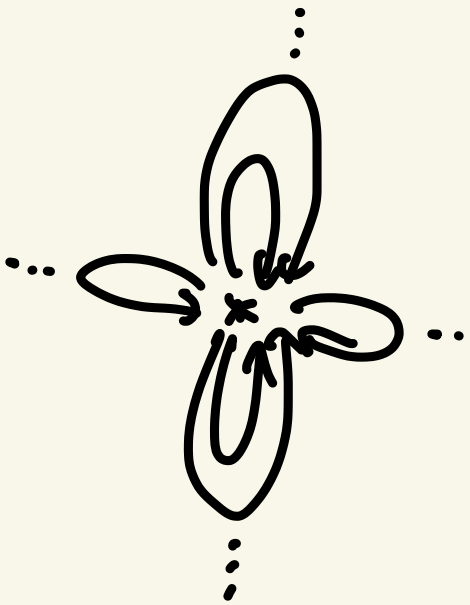
圏＝[対象，射]
矢印のデータを加えたもの。

集合に……

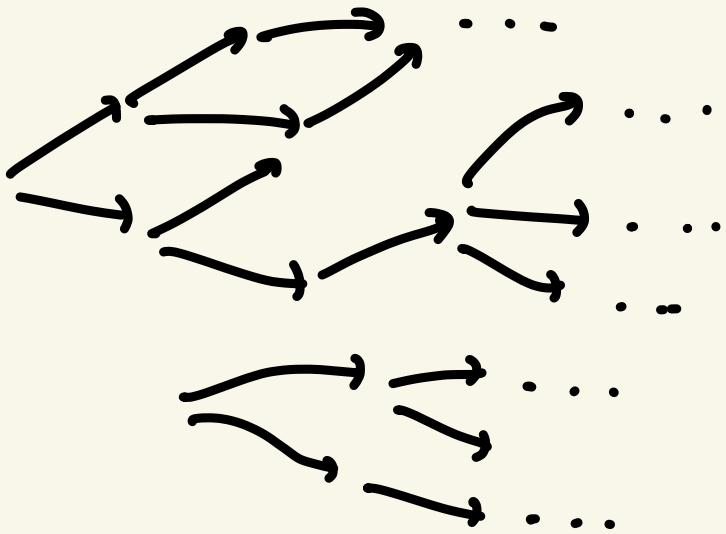


カテゴリー？

モノイド　も　ポセット　も　カテゴリー　!!



対象が1個の圏



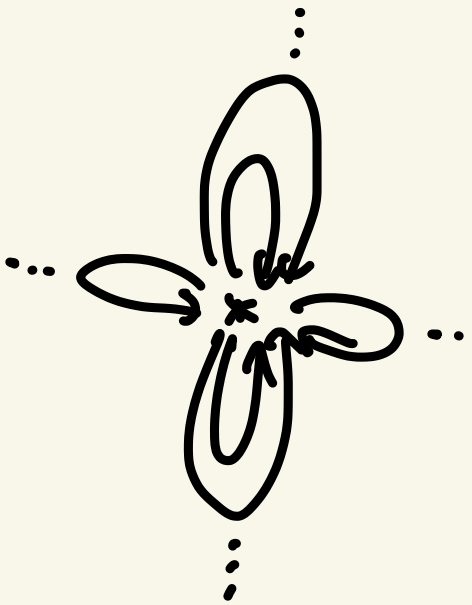
始点…終点…2つ決めた時、
少なくとも1つの射しかない圏

カテゴリー？

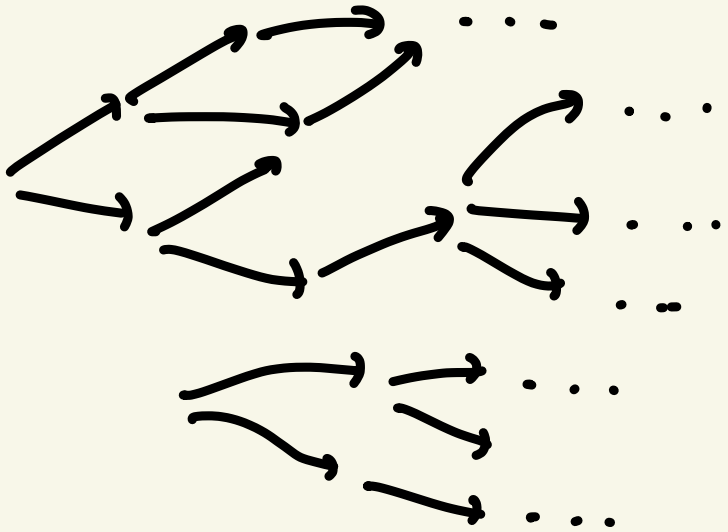
・対象が増えたモノイド が圏！

・射が増えたポセット

モノイド も ポセット も カテゴリー !!



対象が1個の圏

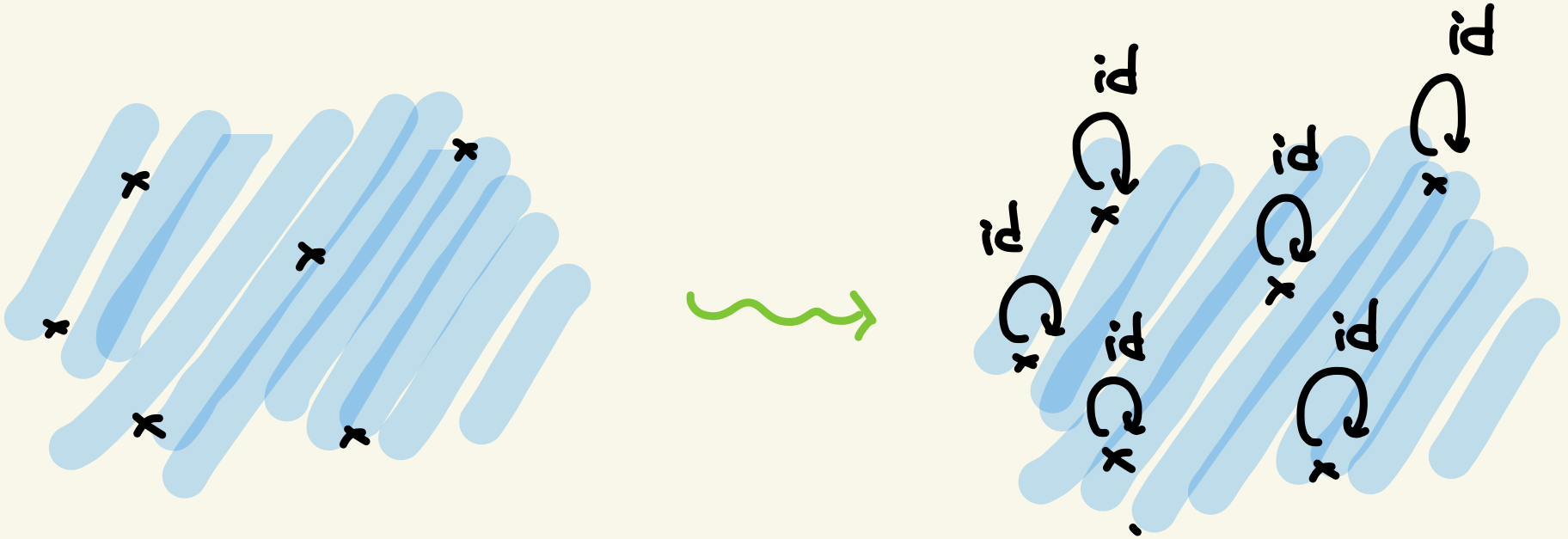


始点…終点…2つ決めた時、

少なくとも1つの射しかない圏

カテゴリー？

そもそも集合だって圏。



離散圏という。

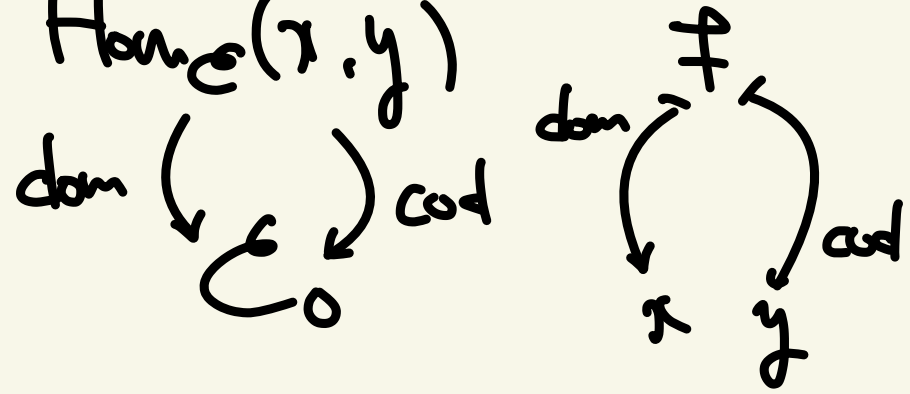
（"単位元"が対象の数だけある。
恒等射, identity という。）

カテゴリー？

一瞬ちょいっと定義もしておこう。

Formalになっちゃう。

$\mathcal{C}$: カテゴリー とは.



domain codomain

: 始点... と終点... が とり出せる。

- 結合的 : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

単位的:

- $id_x = 1_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$, $1_y \circ f = f \circ 1_x = f$

カテゴリー？

定義もしておこう。

$\mathcal{C}$: カテゴリー とは.

$x, y \in \mathcal{C}_0$: 対象の集合 について.

射の集合

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ が定まり、二項演算 がある。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \times \mathrm{Hom}(y,z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(x,z)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$[f, g] \longmapsto g \circ f$$

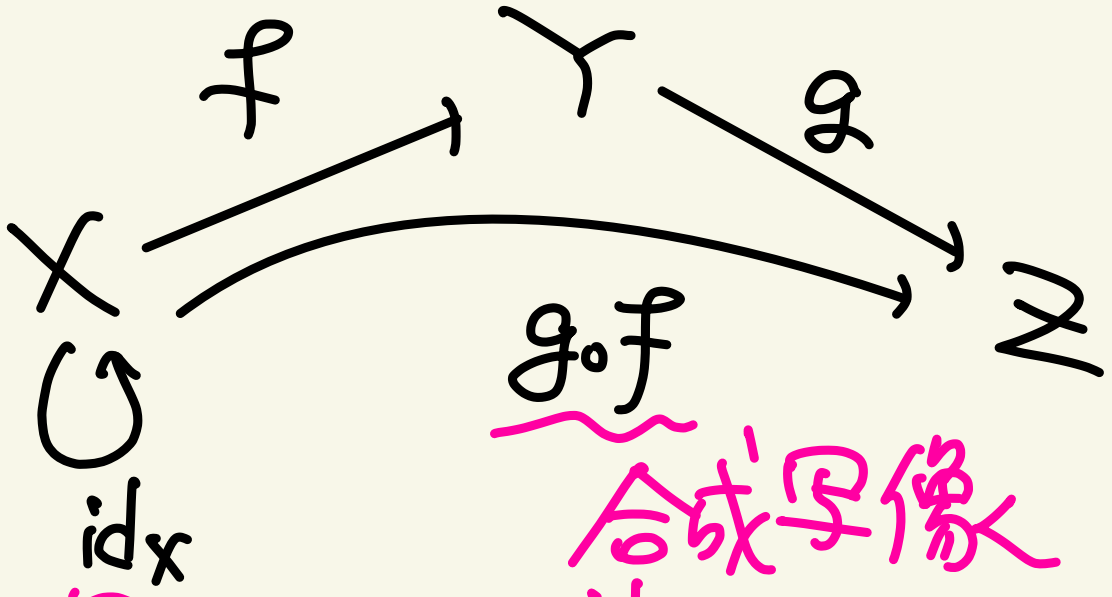
カテゴリー？

☆例：Set

（対象：全2の集合たち。

射　：$X \xrightarrow{f} Y$ ：写像全体）

2"けえ!!
（size issueには目を瞑る。）



合成写像：$x \longmapsto f(x) \longmapsto gf(x)$ （$g \cdot f(x)$）

恒等写像：$x \xmapsto{id_X} x$

カテゴリー？

構造・データの数だけ圏がある！

例

- $\mathbf{Grp}$: 全ての群と準同型
- $\mathbf{Mon}$: 全てのモノイド…
- $\mathbf{Poset}$: 全てのポセット…
- $\mathbf{Cat}$: 全ての小圏…
  ⋮

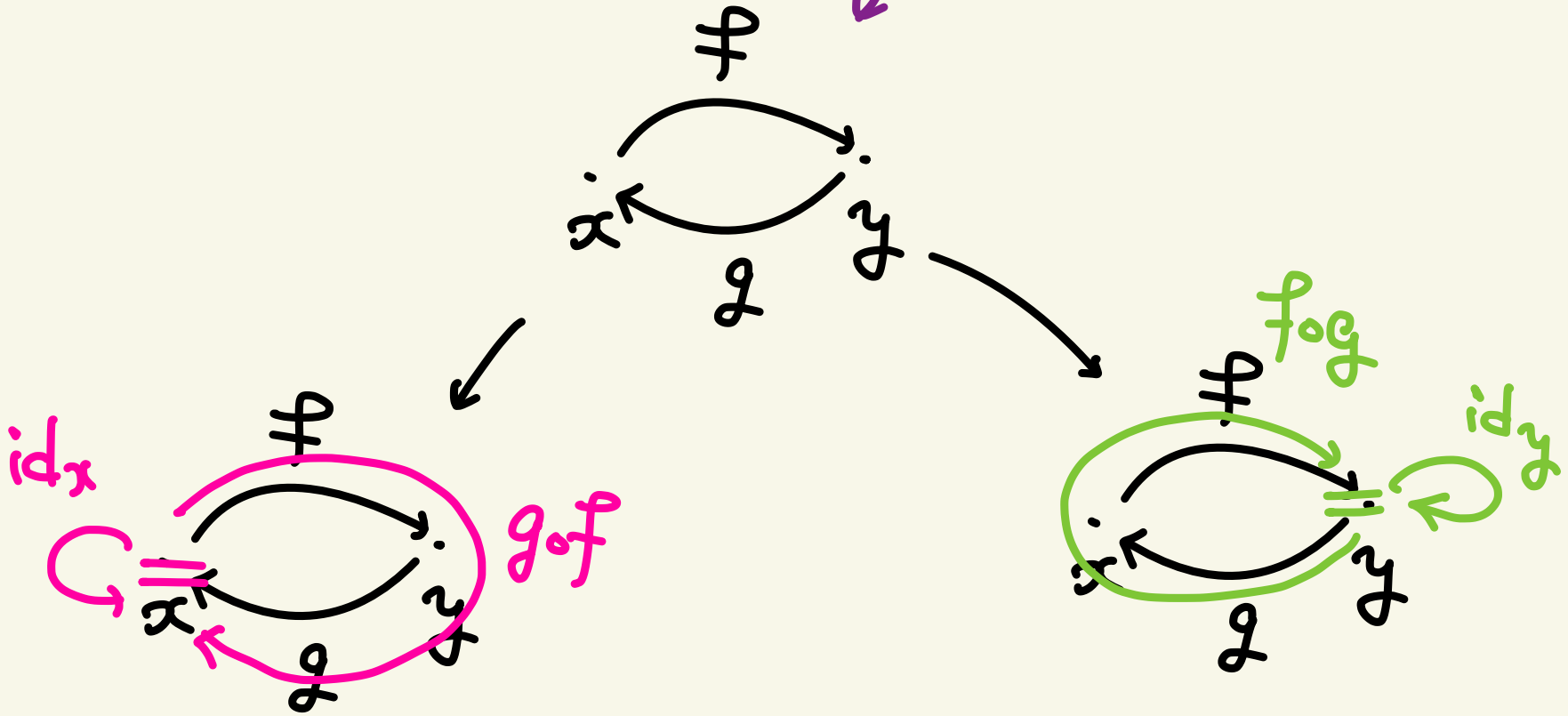
↑ 2げえくない

同型？

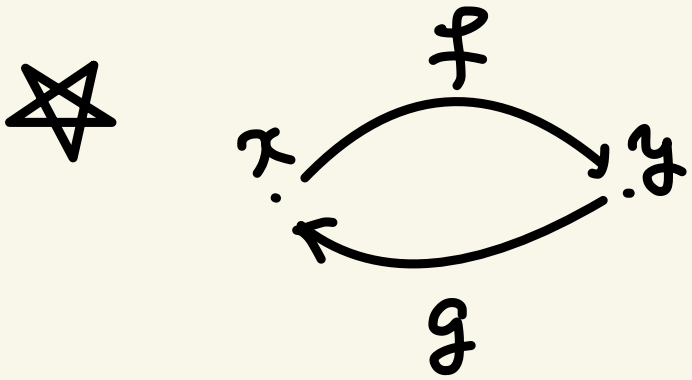
対象

$x \cong y$ とは こうなる f, g があるということ。

（同型，アイソモルフィズム）

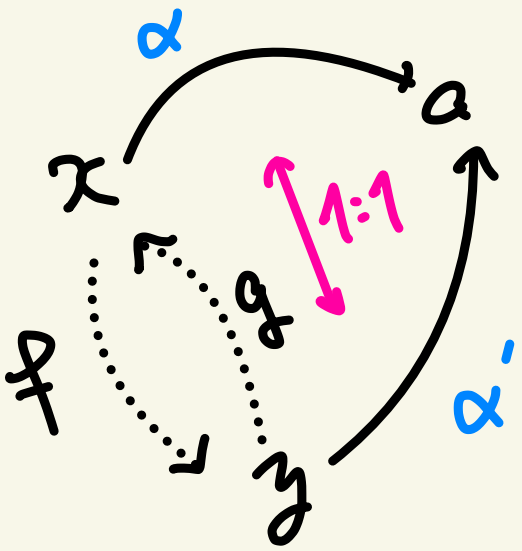


同型？



$x \overset{f}{\cong} y$ のとき.

第三者の対象 a について.

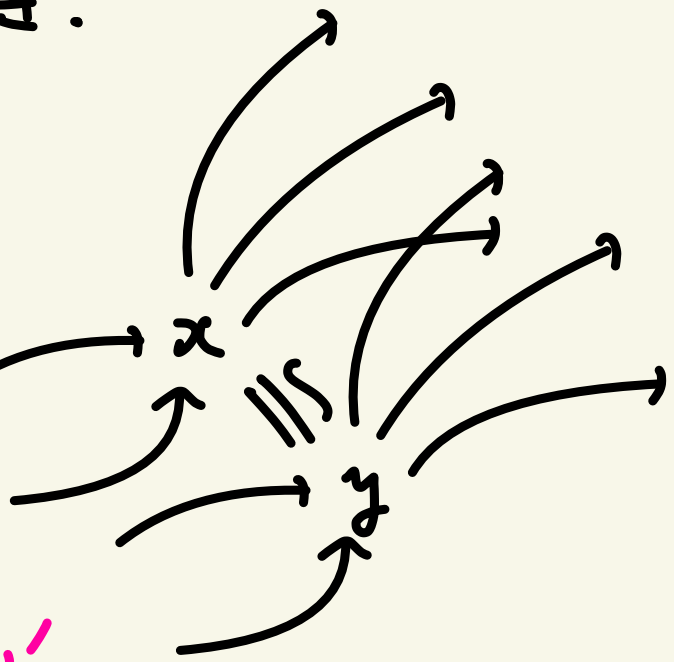


$\alpha \longmapsto \alpha \circ g$

$\alpha' \circ f \circ g = \alpha'$

$\alpha' \circ f \longleftarrow \alpha'$

$\alpha \circ g \circ f = \alpha$



xからみた射たちの形と

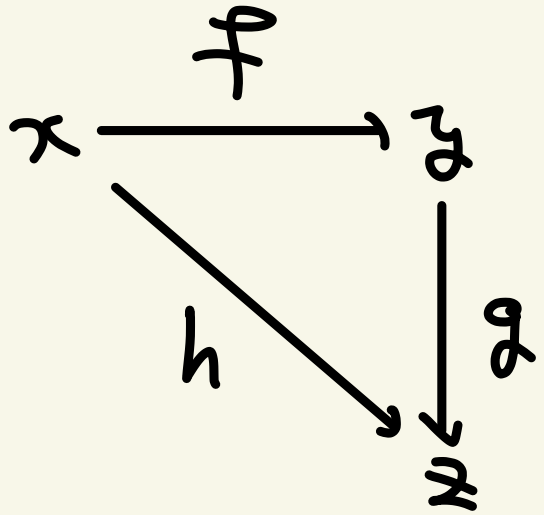
yから見た形が

完全に一致してる。

(逆も正しい！米田！)

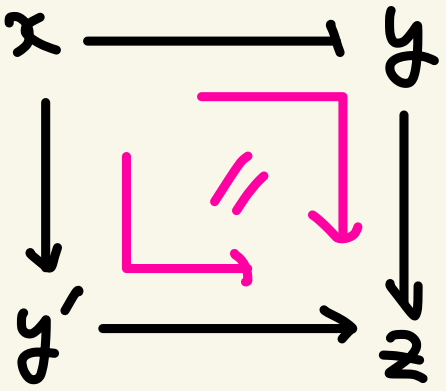
可換図式？

図である式（すでにたくさん書いてるけど。）



：$h = gf$ のこと。

左のように書いて、可換であることは限らないこともあるから注意。



とか。

普遍性

ポセットが重要な例
なことを思い出して。

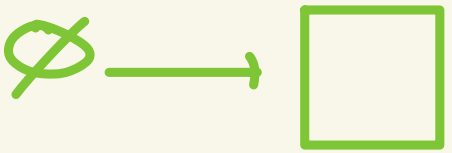
・「まるまるを充たす中で最大/最小」
という概念の一般/精致化。

・対象そ、それぞれ「という善く射たち」という
外から特徴付ける方法。

・普遍的な対象は、「unique up to
unique isom.!」

「本質的に唯一ってこと！」

普遍性



in Set　Xは任意の集合。



∅について

$\emptyset \dashrightarrow X$

∃! ※

唯一存在の記号

$X \times \emptyset = \emptyset$

$\parallel$

$T_\emptyset$:空写像

1+1：1元集合について

$X \overset{\exists!}{\dashrightarrow} 1+1$

・全ては1元.*へと出力。

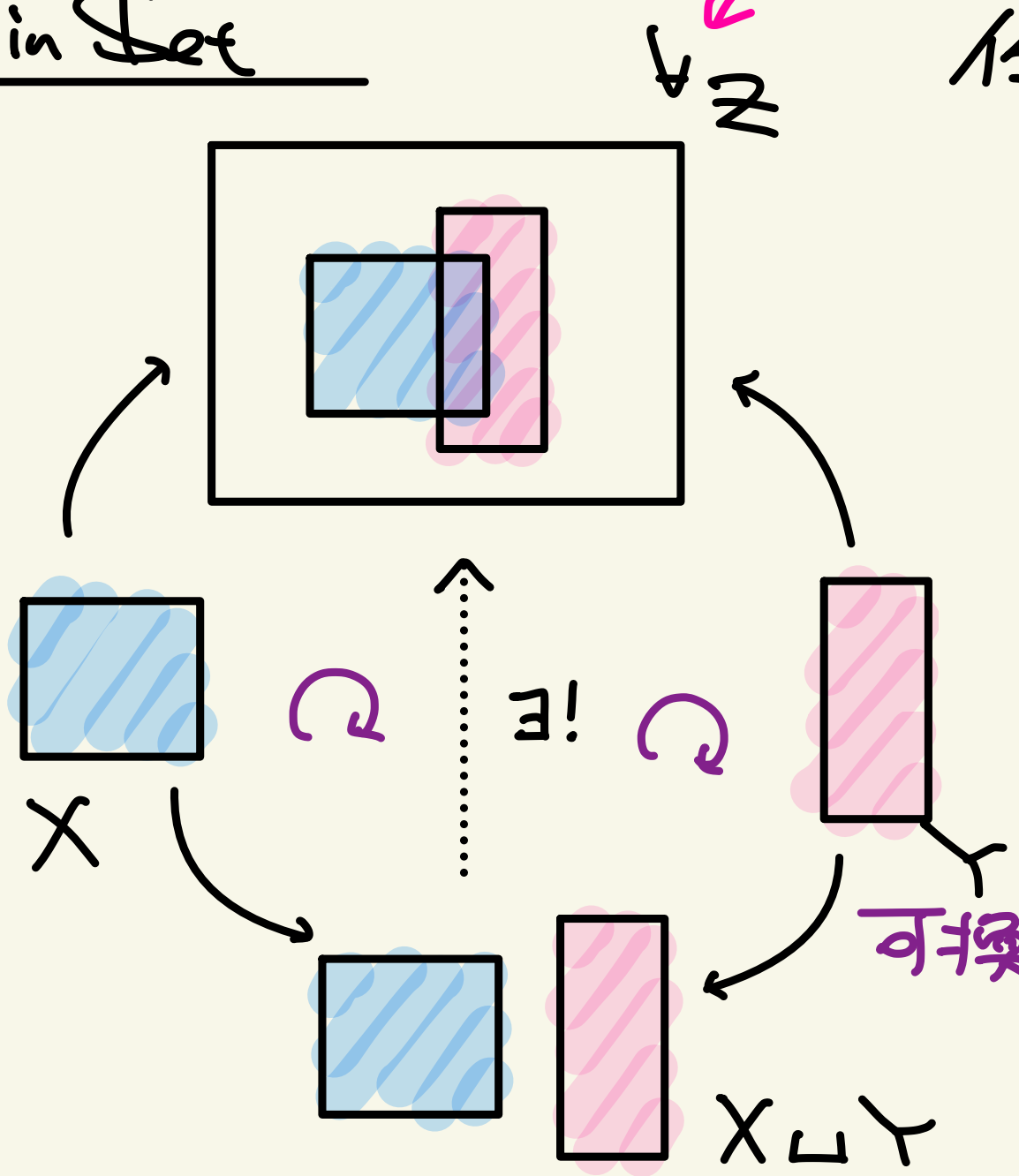
↪「全ての対象Xから唯一の射がある」

対象：∅, 1+1の一般化！

始/終対象という。

普遍性

in Set



任意に/全ての、という仕の記号。

任意に Z,

$X \longrightarrow Z$,

$Y \longrightarrow Z$

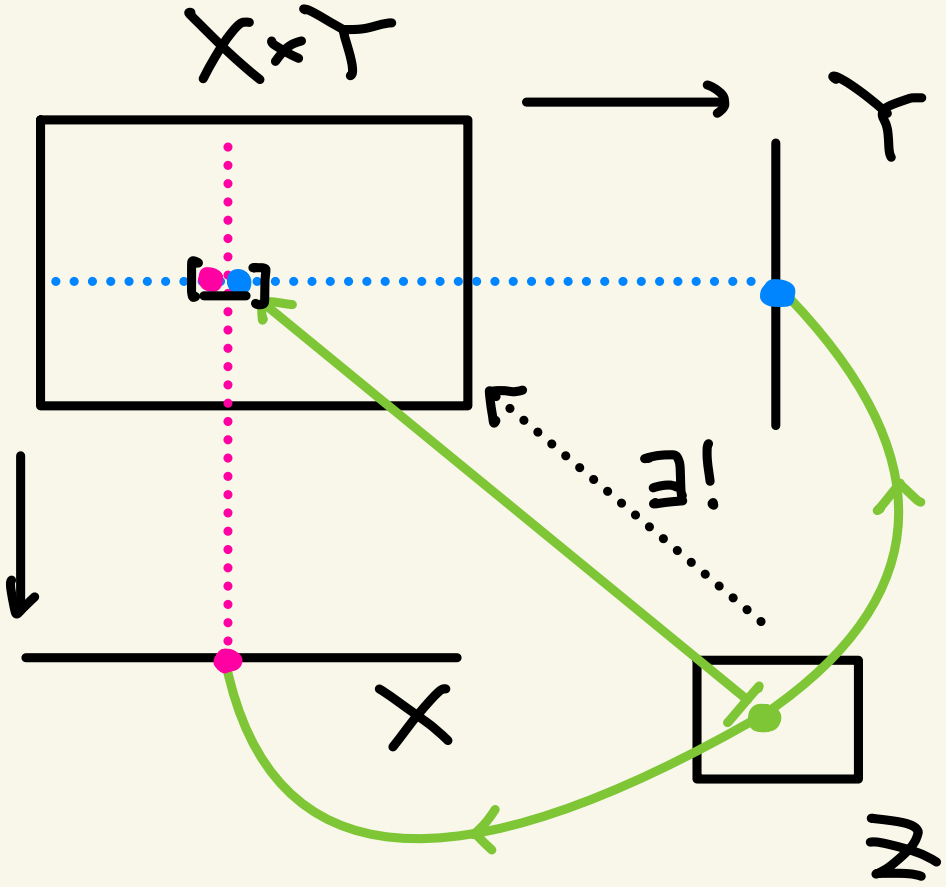
があると、左のように、

$X \sqcup Y \overset{\exists!}{\dashrightarrow} Z$

となる。

普遍性

in Set



∀Z,

Z ⟶ X,

Z ⟶ Y

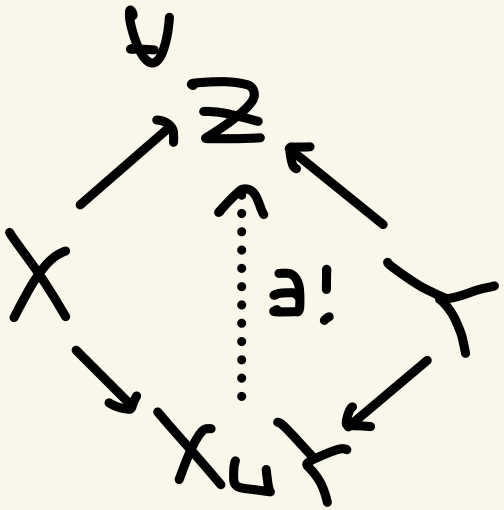
があると、左のように

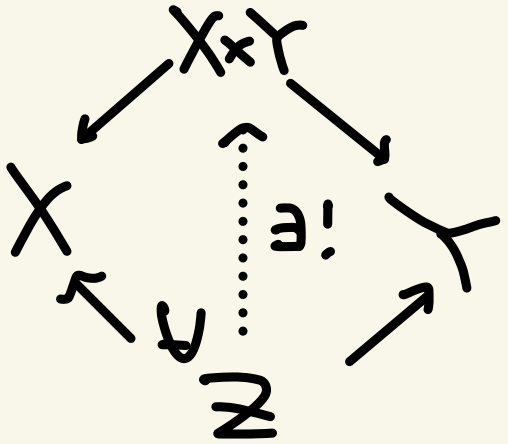
Z ⇢ X×Y
　∃!

となる。

普遍性

in $\mathcal{C}$ でも.





の形の性質を充たす対象を

$\mathcal{C}$ における余積/積という。

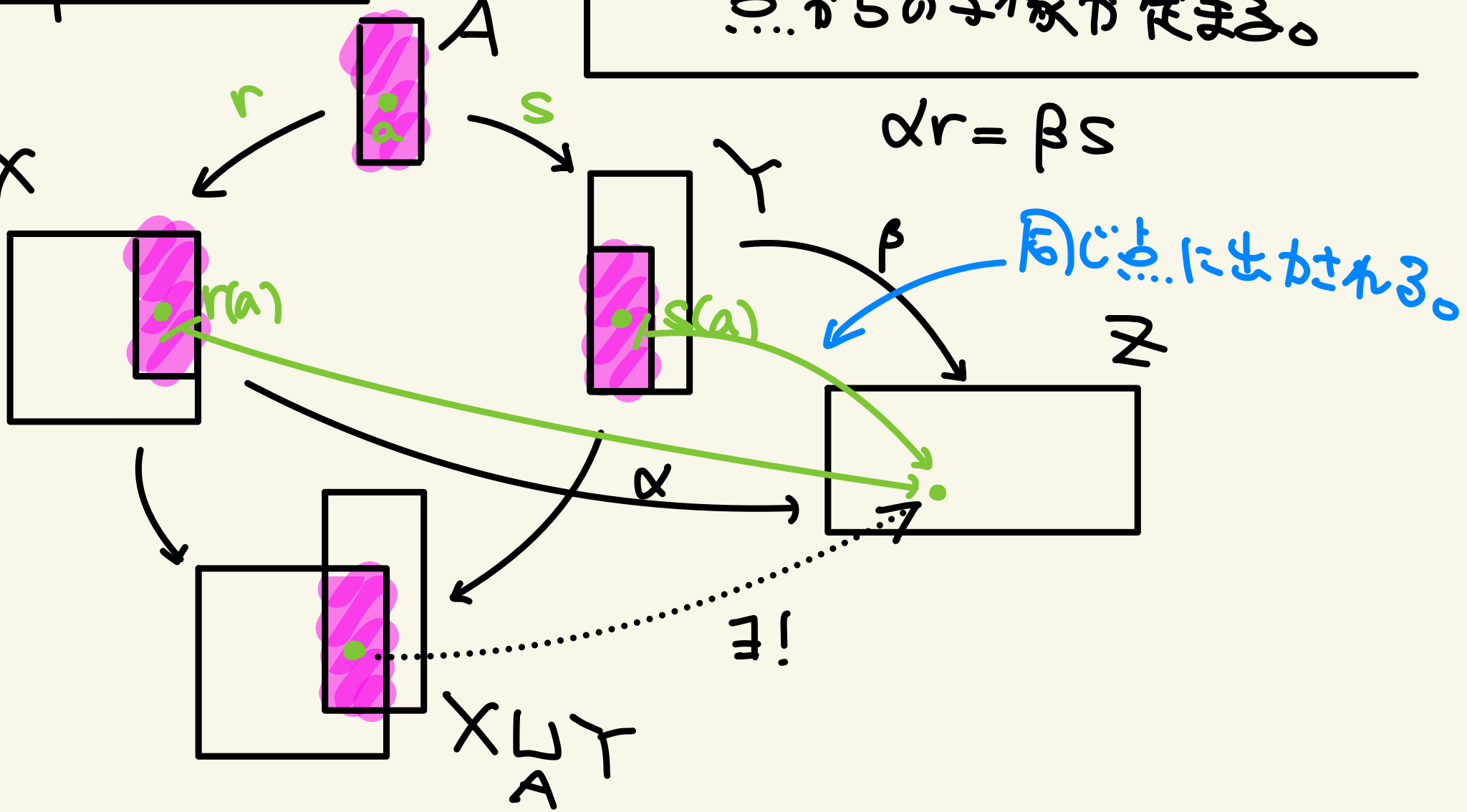
(※あるとは限らないよ。)

普遍性

in Set

pushout

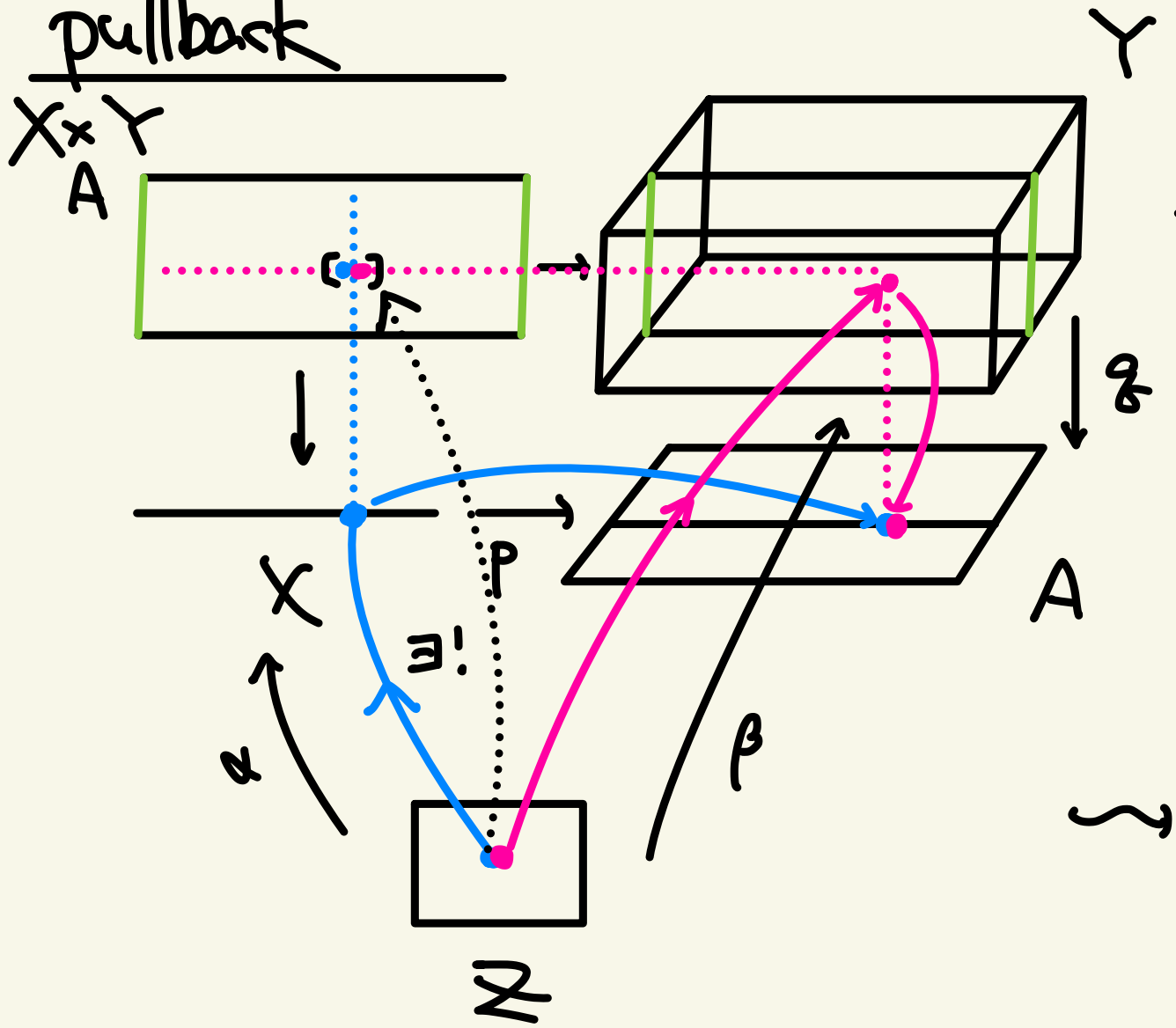
※
$\alpha(r(a)) = \beta(s(a))$
だから、同一視された $X \coprod_A Y$ の
点からの写像が定まる。



普遍性

in Set

pullback



※ $p\alpha = g\beta$

だから、$p\alpha = g\alpha$

となるpairへと α, β は

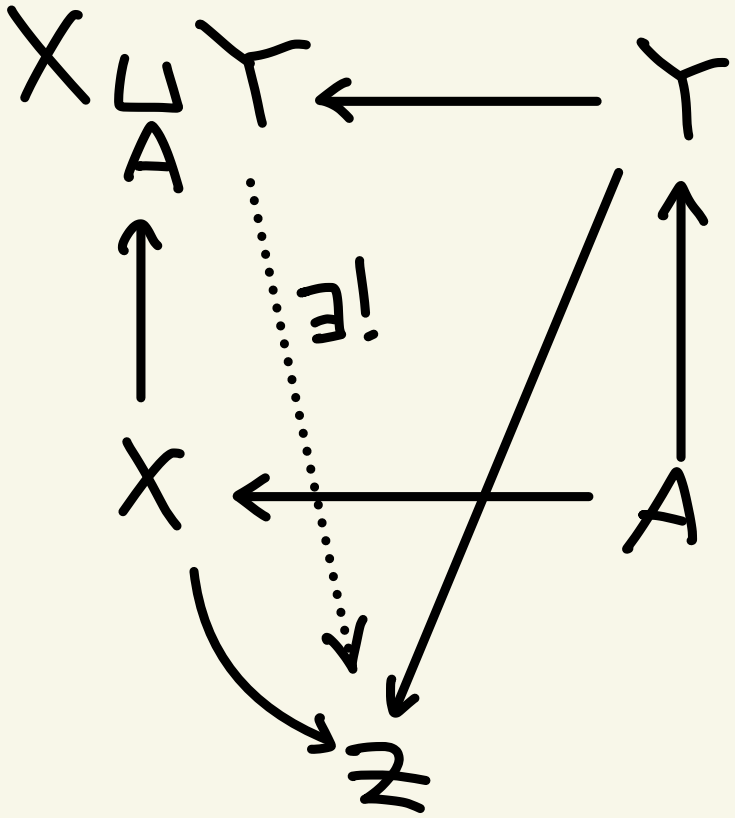
z に出射する。

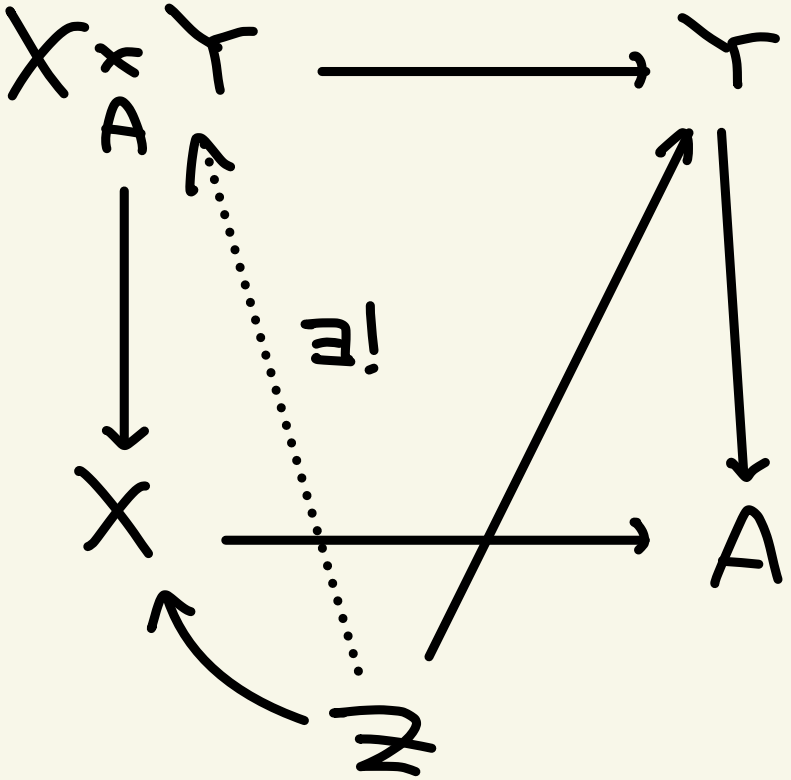
$\rightsquigarrow$ $X \times_A Y$ への写像

が定まる。

普遍性

in $\mathcal{C}$

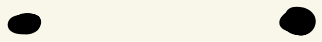
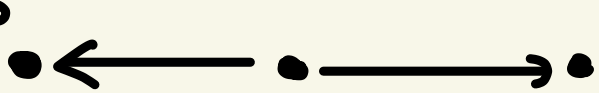
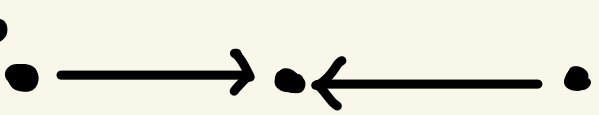


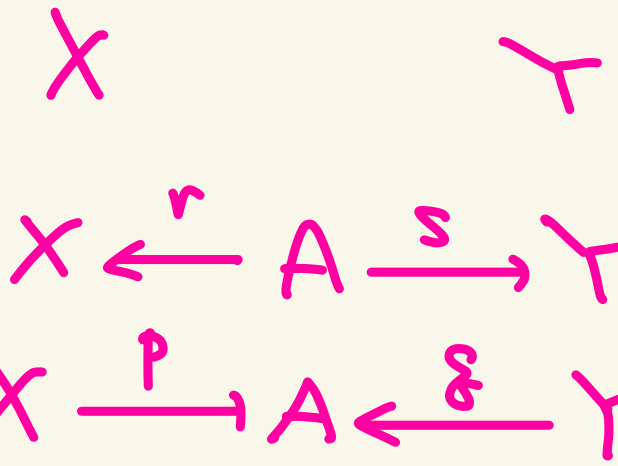


以上の2つの図式の性質がpushout/pullbackで一般化する！

普遍性

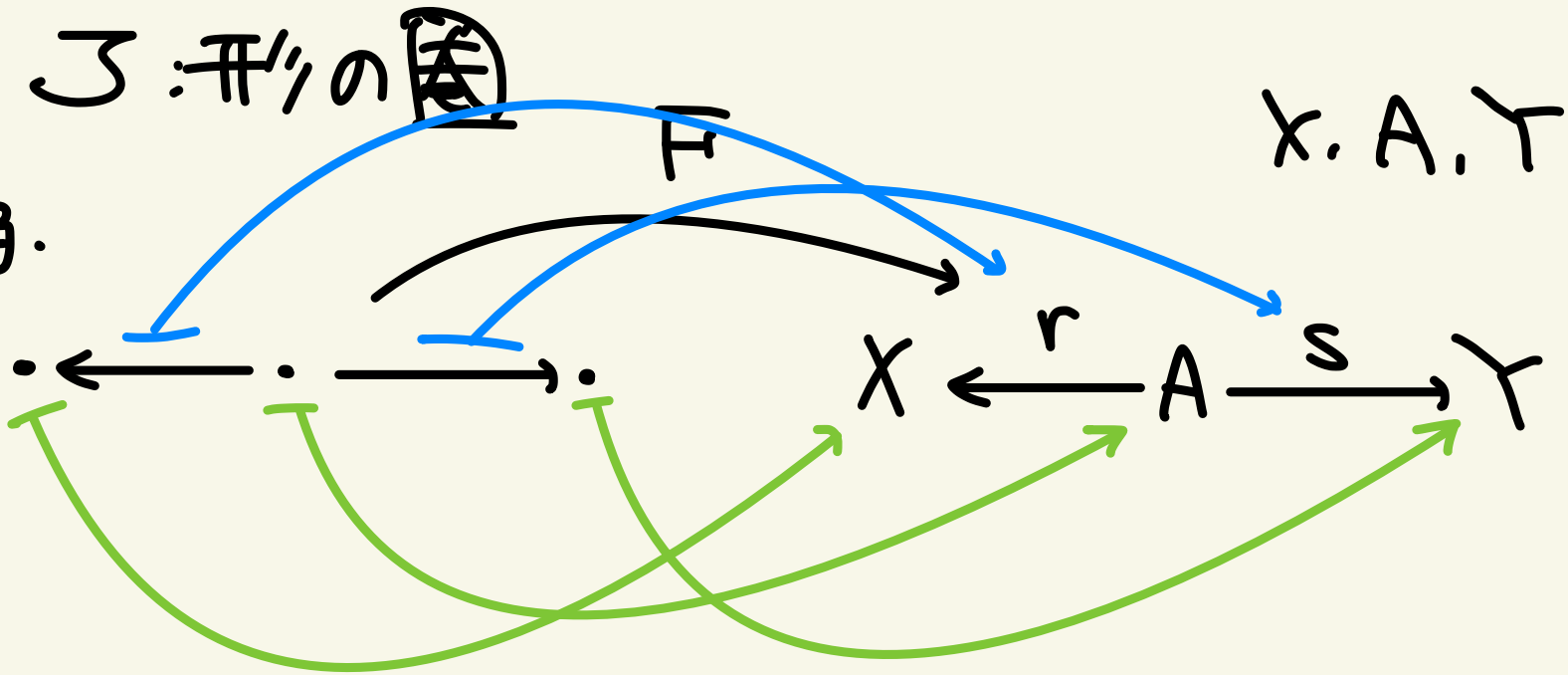
図式"の形"にだけ注目してみる。

	図式の形
始/終対象	$\emptyset$
余積/積	
pushout/pullback	po  pb 



↪ 形 と "その上の対象" に分けて考える。

函手



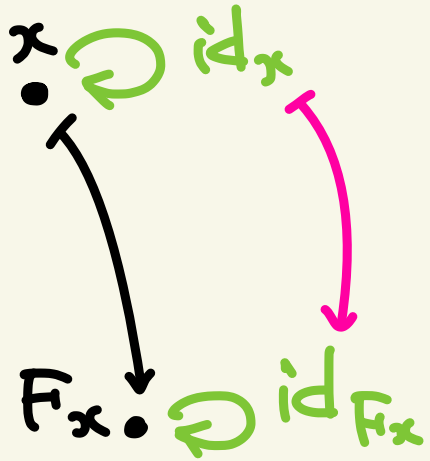
$\hookrightarrow J \xrightarrow{F} \mathcal{C}$: 対象と射の間の写像で

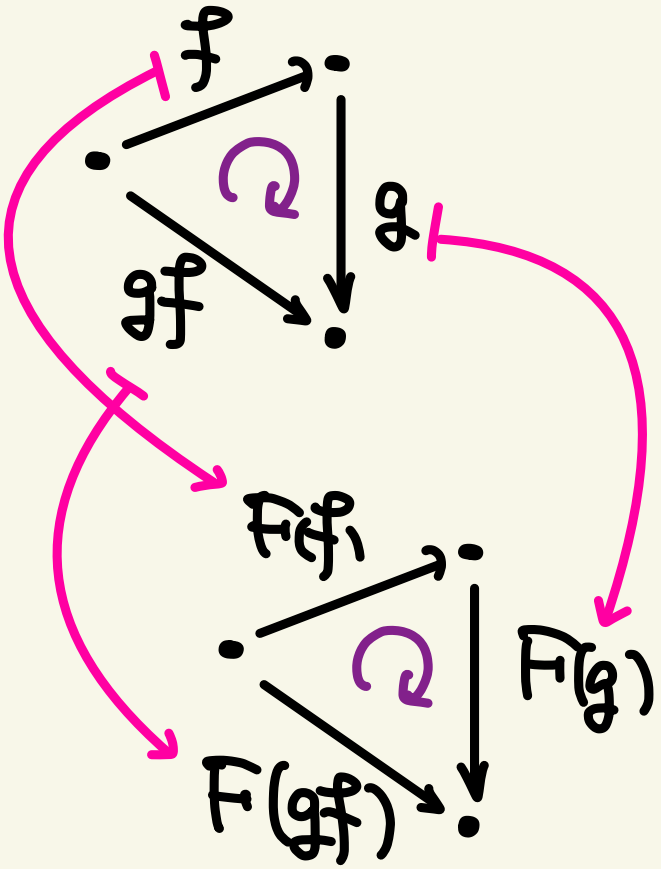
射の可換性を保つもの!

函手

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

- $x \longmapsto F(x)$
- $[x \xrightarrow{f} y] \longmapsto [F(x) \xrightarrow{F(f)} F(y)]$
- $F(id_x) = id_{F(x)}$
- $F(gf) = F(g)F(f)$





函手

反変函手

※ $\mathcal{C}^{op}$ は対象は $\mathcal{C}$ と同じ。

$g \circ^{op} f = f \circ g$ と定めたカテゴリー。

$\mathcal{C}$ の ⟶⟶ を $\mathcal{C}^{op}$ では ⟵⟵ と解釈する。

$$F(g \circ f) = F(f) F(g)$$

が成立する函手がある。

これを双対圏を用いて

$$\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

と書く。

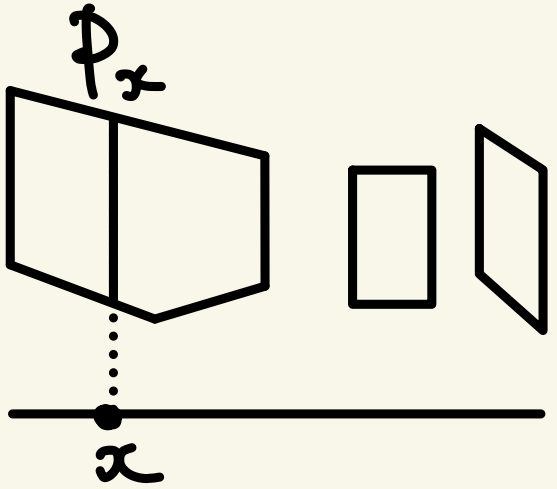
函手

例

離散圏

- X：集合

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & \mathbf{Set} \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & P_x \end{array}$$



- M, M'：モノイド

$$M \xrightarrow{\varphi} M' : \text{準同型} \quad \left(\text{つまり} \ \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y),\ \varphi(e)=e\right)$$

$\rightsquigarrow M, M'$ をカテゴリーとみると φ は函手。

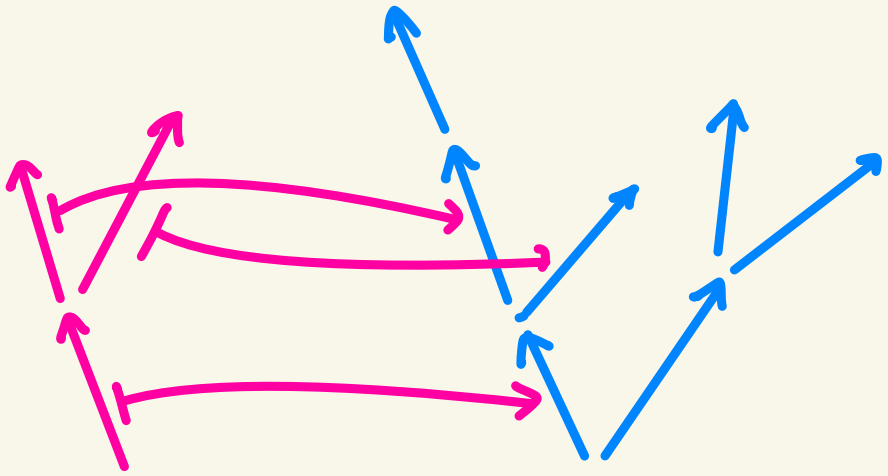
函手

例

- P, P'：ポセット

  $P \xrightarrow{\varphi} P'$：単調（つまり、$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$）

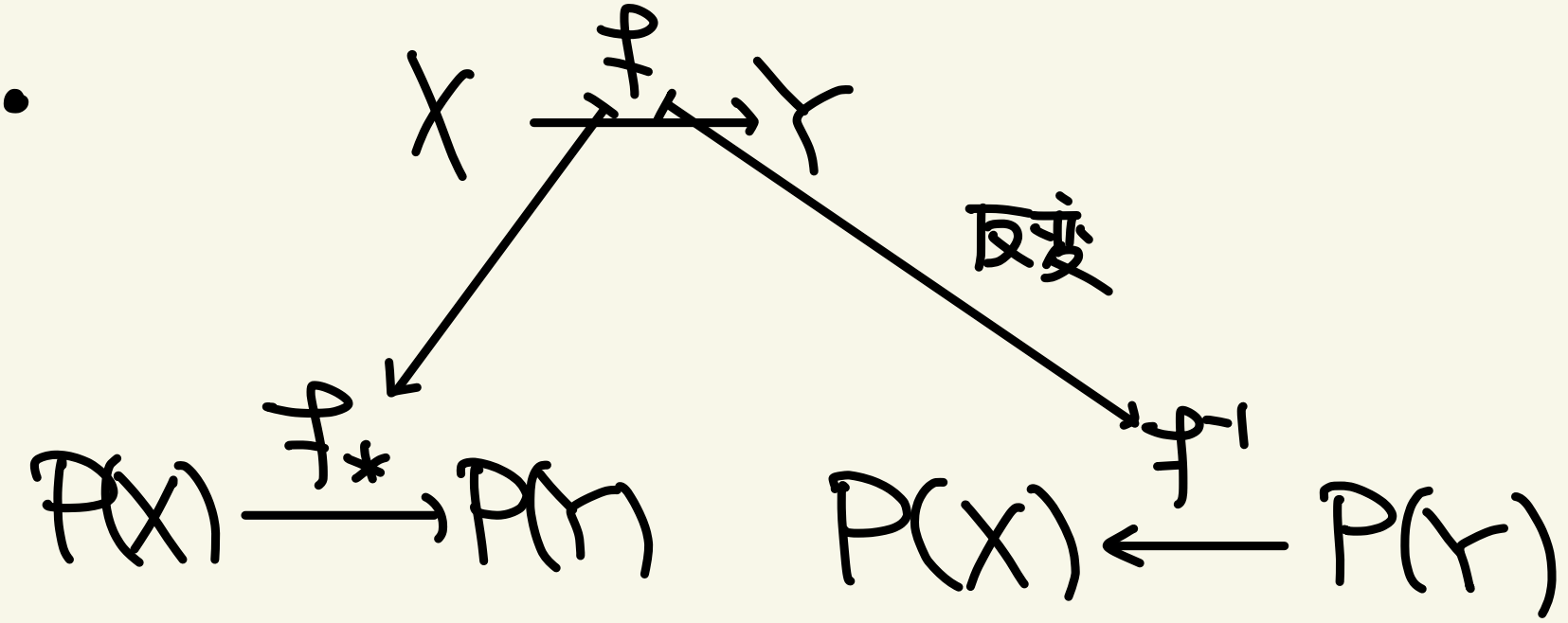
  ↪ P, P' をカテゴリーと見ると φ は函手。



函手

例

2つの函手：Set

- 

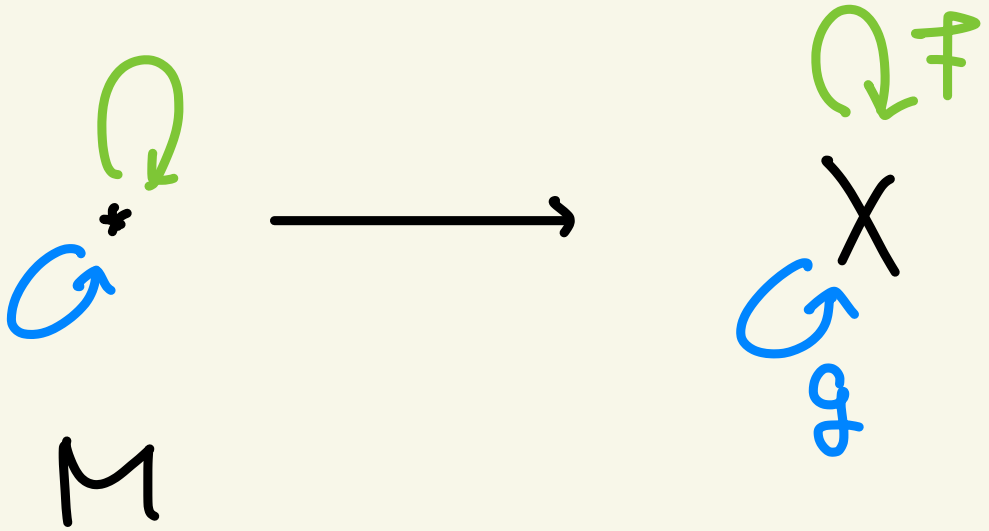
- $(fg)_* = f_* g_*$
- $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$

(c.f. 行列の積とヒヒベてみて。)

函手

例

XのM ： モノイド作用つき集合



函手

例

✡ hom函手

米田の丁

fix! $a \in \mathcal{C}$

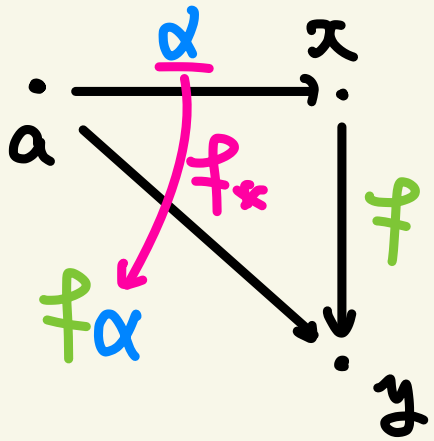
$\tilde{y}(a)$

$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ・共変hom函手。

$x \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$

f ↓ ↓ f_*

$y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, y)$



函手

例

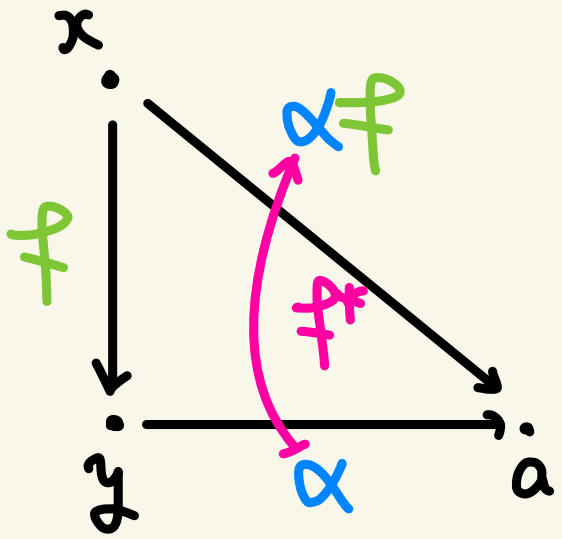
✡ hom函手

fix! $a \in \mathcal{C}$

圏$\mathcal{C}$に内在的な情報を
$\mathcal{C} \longrightarrow$ Set という、情報
へと再エンコードしている。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{y(a)} & \mathbf{Set} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) \\ \downarrow f & & \uparrow f^* \\ y & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, a) \end{array}$$

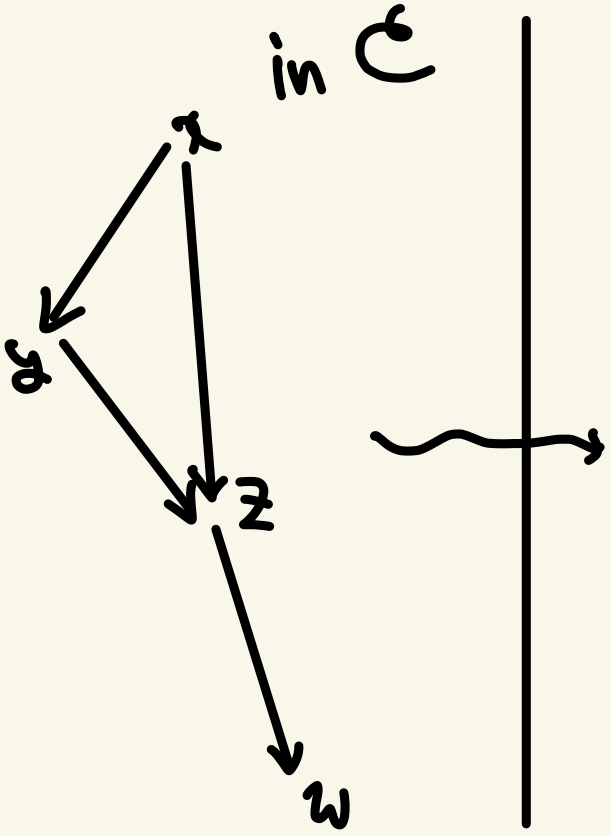
：反変hom函手。

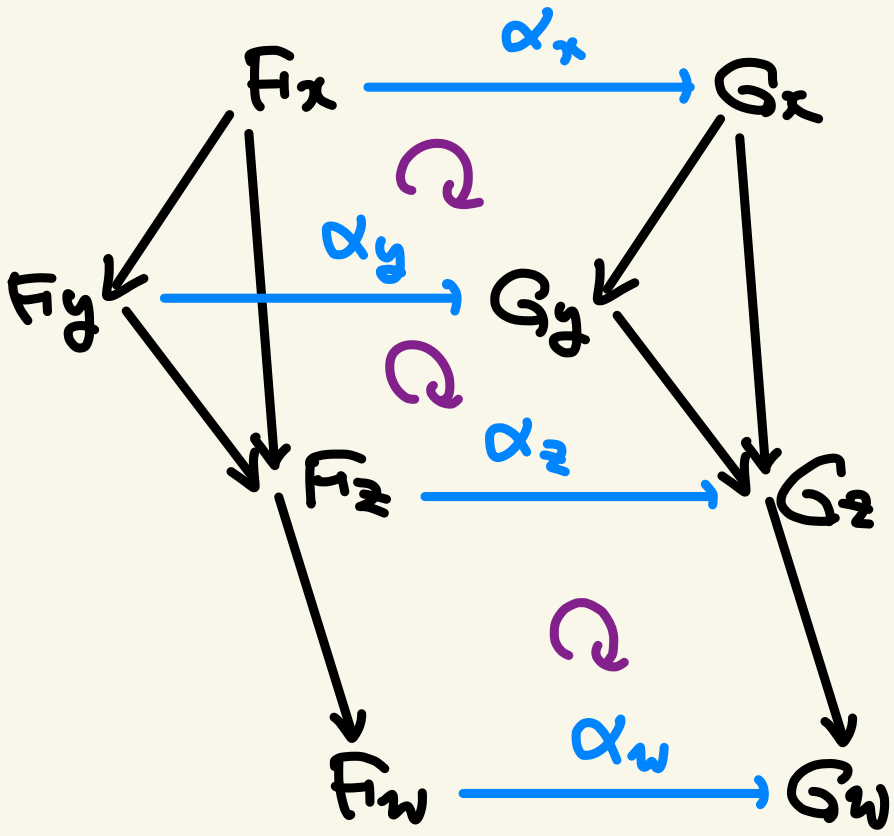


自然変換

函手は圏と圏を比較する。

⟶ 自然変換は函手と函手を比較する。





in D

FとGの間に張った膜のイメージ！

自然変換

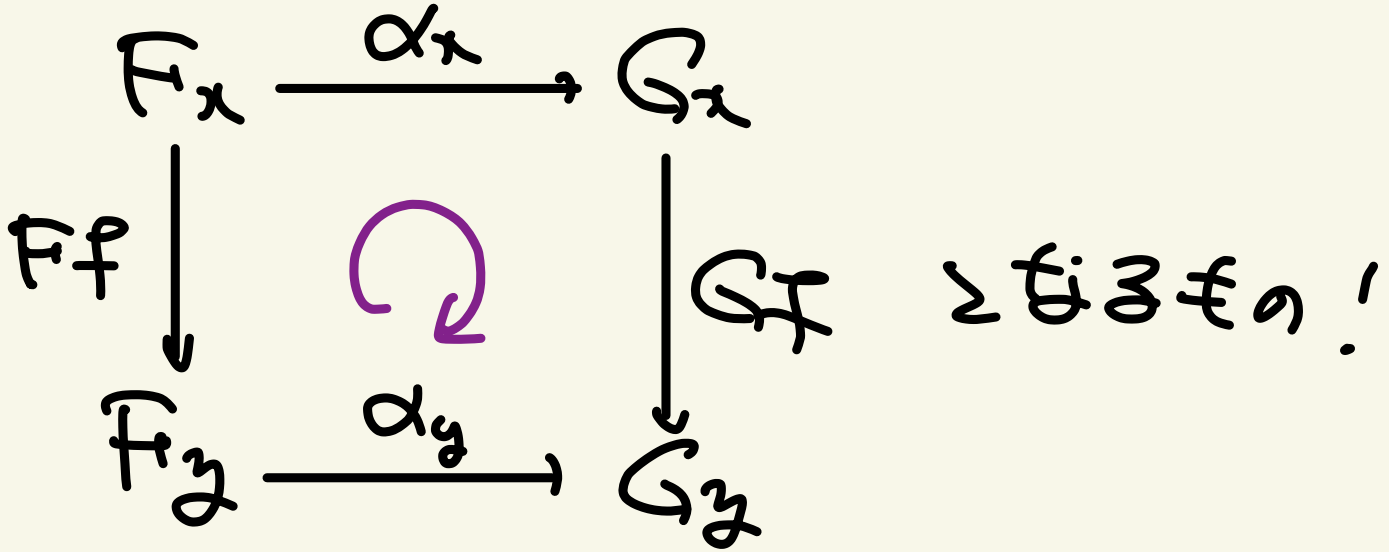
定義

$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$: 函手

- $F \overset{\alpha}{\Rightarrow} G$: 自然変換とは、

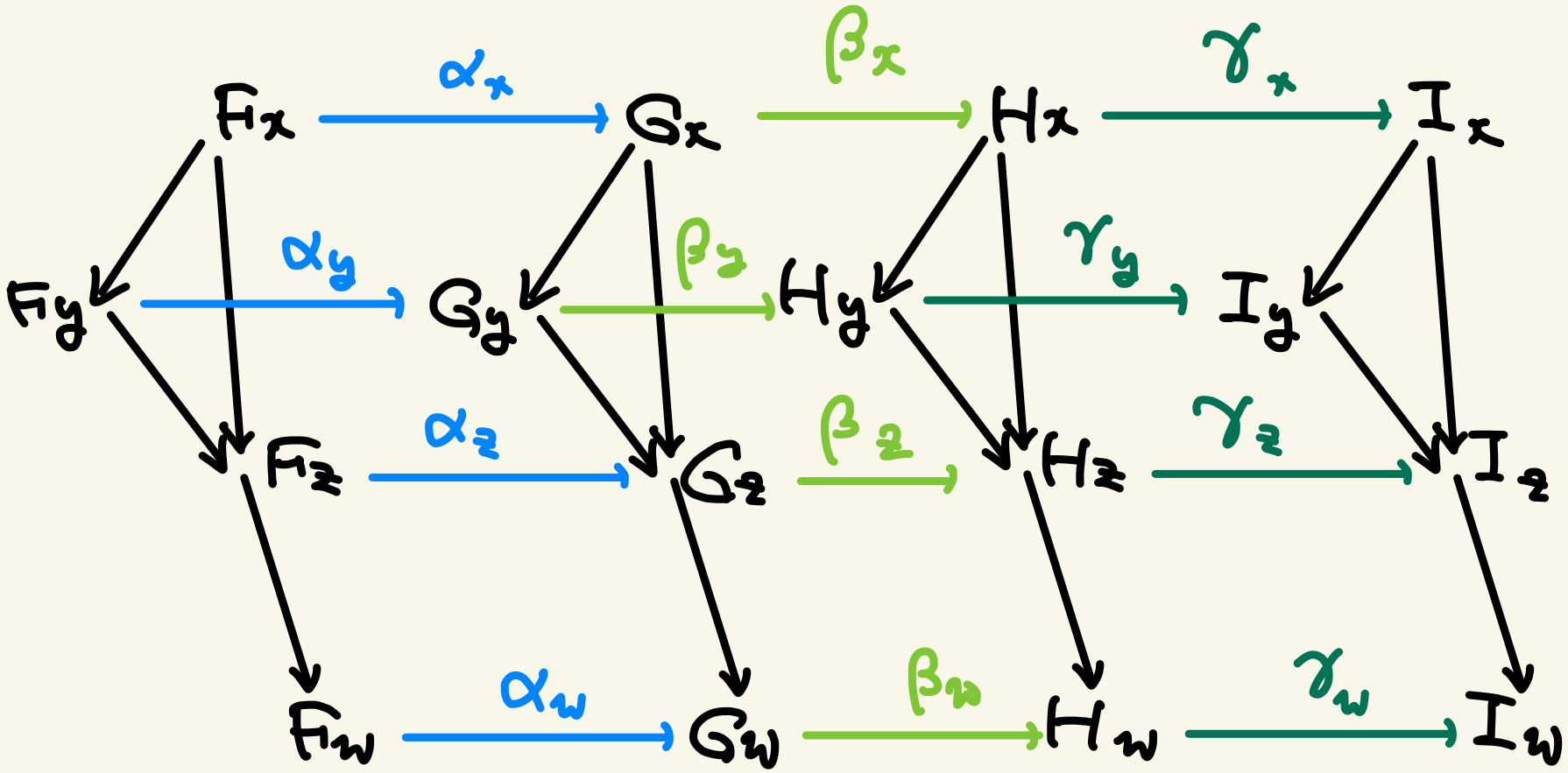
  $\mathcal{D}$ の射の族 $\{\alpha_x : Fx \longrightarrow Gx\}_{x \in \mathcal{C}_0}$

  であって、



となるもの！

自然変換



$\gamma\beta\alpha$ のように合成できる

↪ 函手を対象とする圏が考えられる！（函手圏）

自然同型

F, G : 函手。

2函手の等価性

- $F \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} G$: 自然変換 があって、

$$\alpha\beta = id_G \ , \ \beta\alpha = id_G$$

となること。（函手圏の同型）

自然同型

もう少し細かく見ると……

$\forall x \in \mathcal{C}$ で

$Fx \xrightarrow[\cong]{\alpha_x} Gx$ のように、各点 x 毎の同型があるのにかえて、

- $\alpha_y(Ff) = (Gf)\alpha_x$ となることが課されている。

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\alpha_x} & Gx \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ Fy & \xrightarrow{\alpha_y} & Gy \end{array}$$

自然変換

前層圏

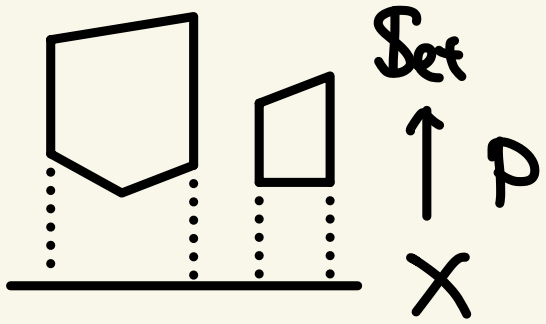
$\mathcal{C}$：小さな圏

↪ $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$：函手圏

⟶ 例へ！

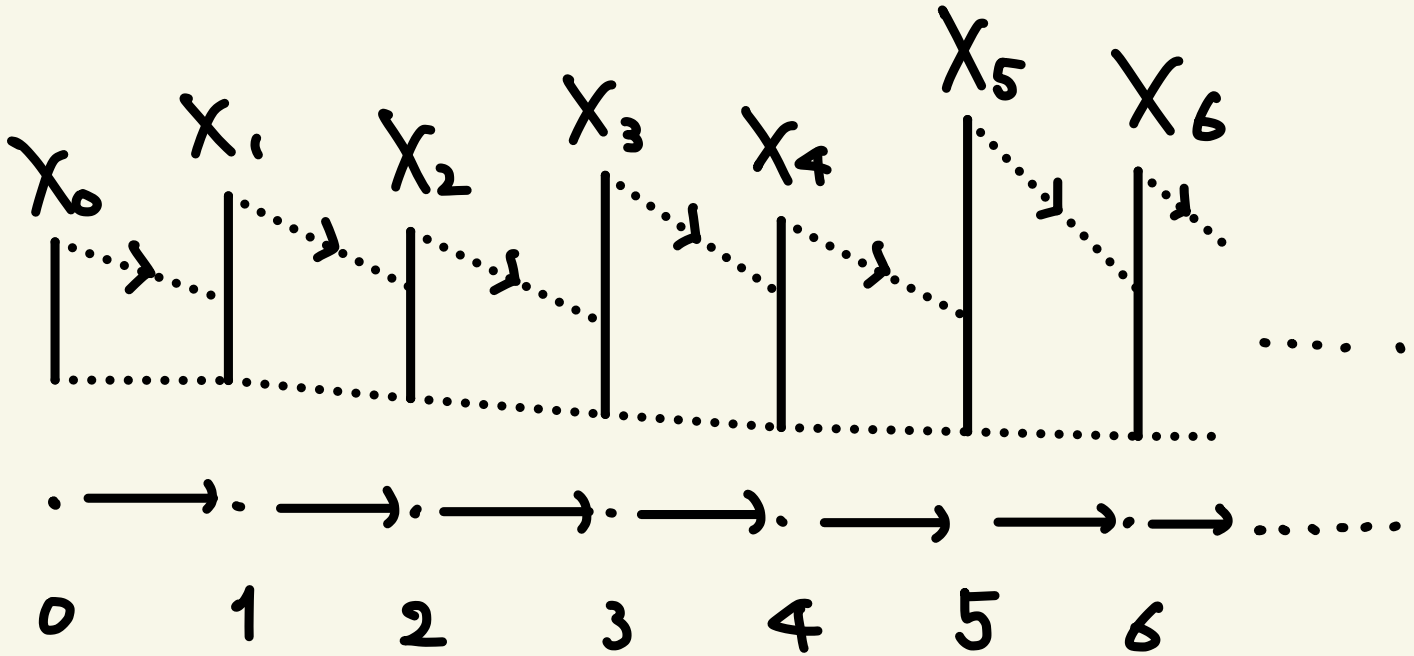
色々な前層

- $\mathcal{C} = X$: 離散



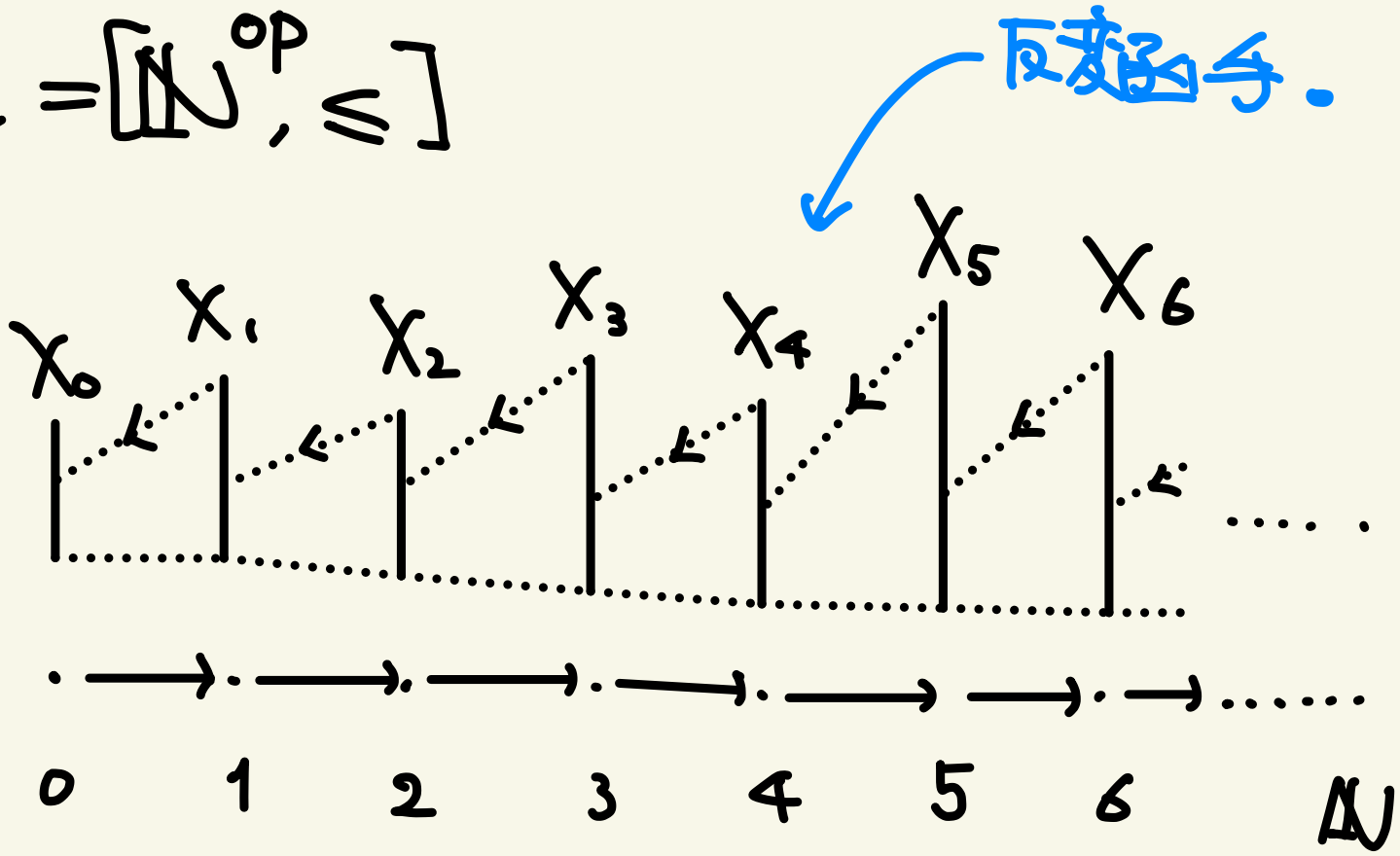
$\rightsquigarrow$ 既に出てる。

- $\mathcal{C} = [\mathbb{N}, \leq]$: ポセット



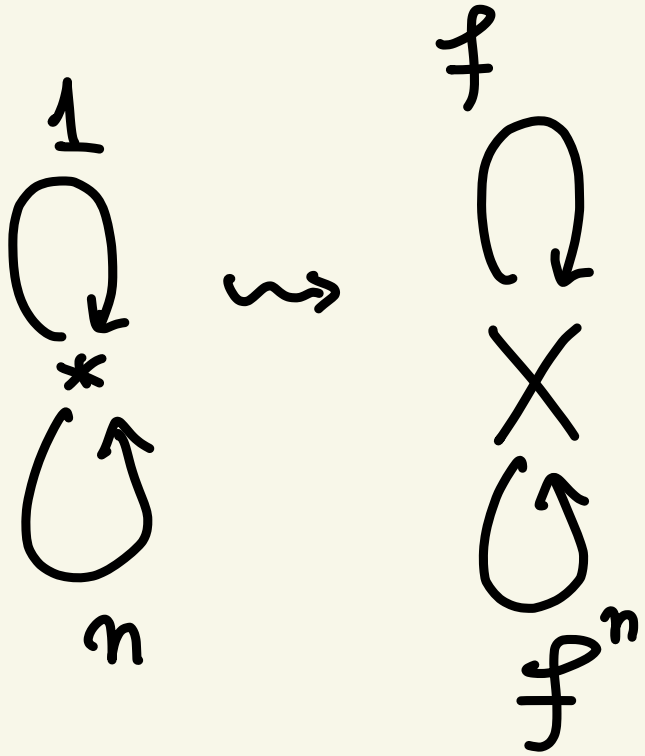
色々な前層

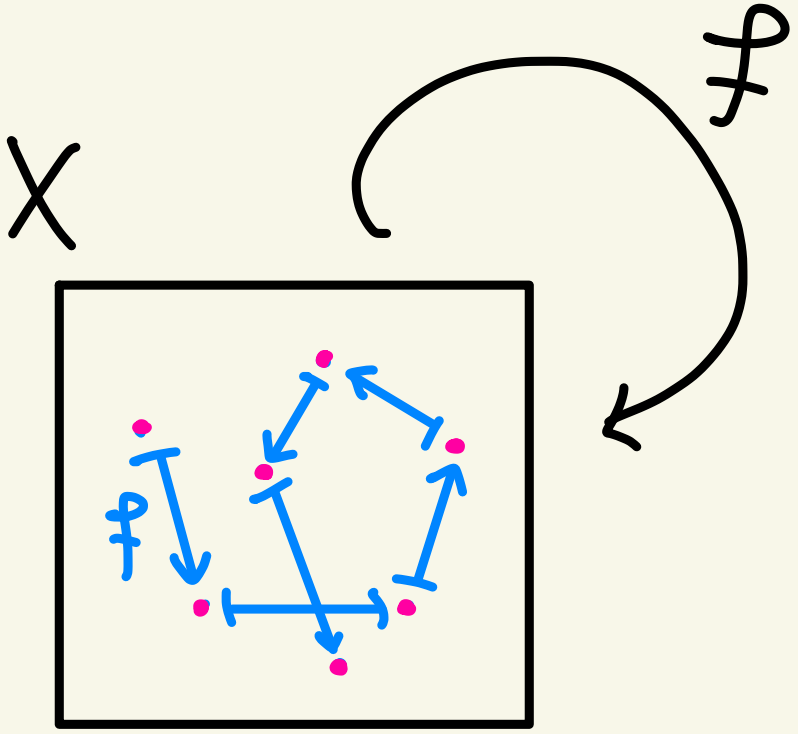
- $\mathcal{C} = [\mathbb{N}^{op}, \leq]$



色々な前層

- $\mathcal{C} = [\mathbb{N}, +]$: モノイド





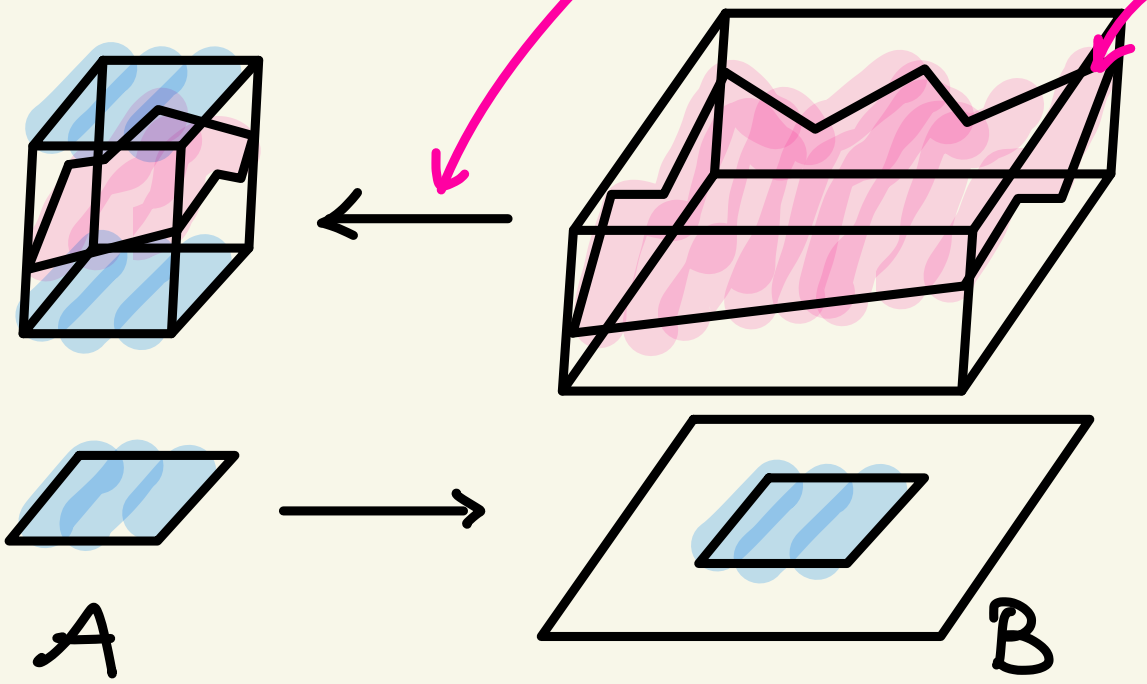
離散力学系

$[X, f]$

色々な前層

$\mathcal{P}(X)$：べき集合 ポセット

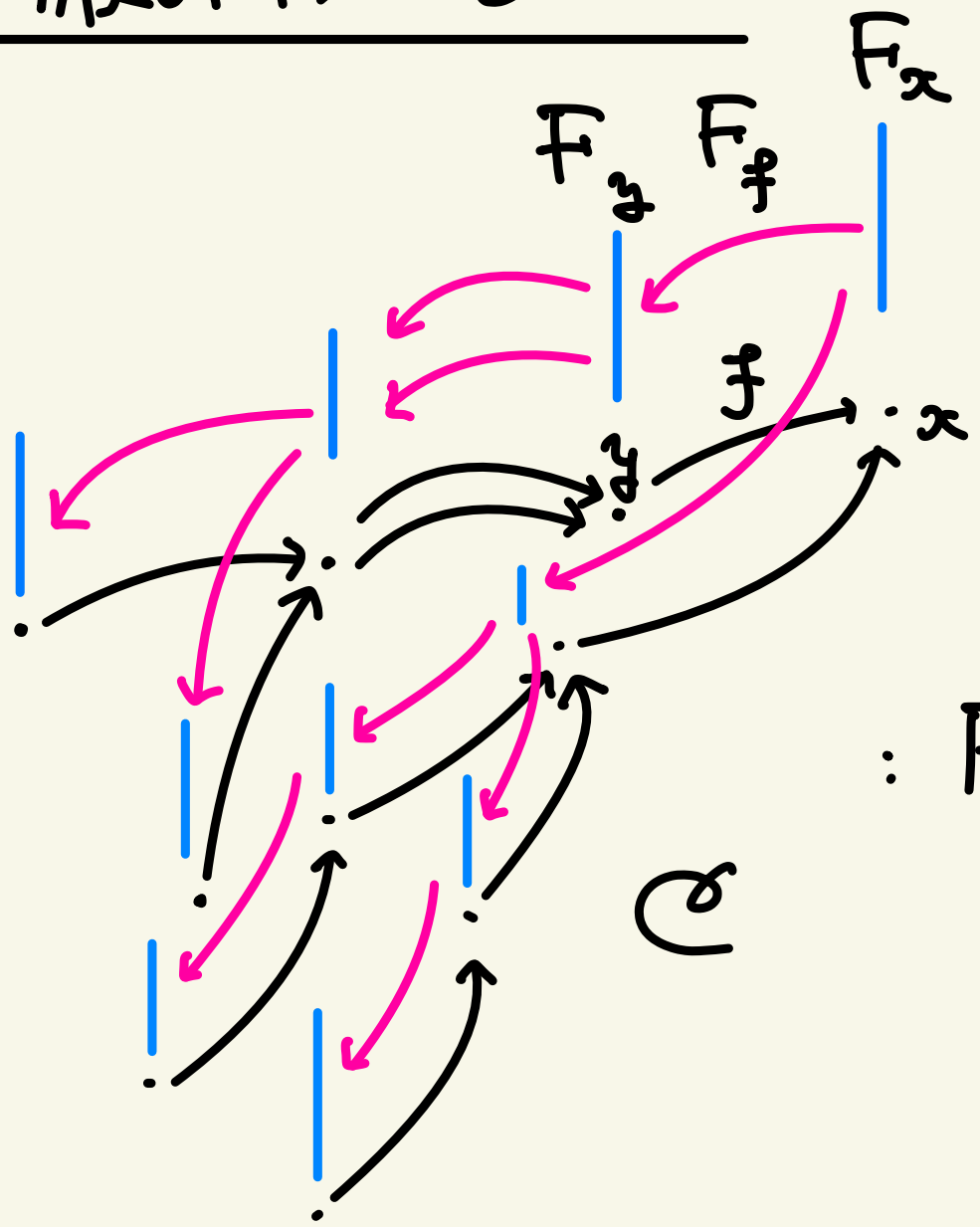
$\rightsquigarrow \mathcal{P}(X)^{op} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$



B上の函数を
Aへと制限する。
（反変!!）
B上の
切断
（函数）

色々な前層

・一般のイメージ



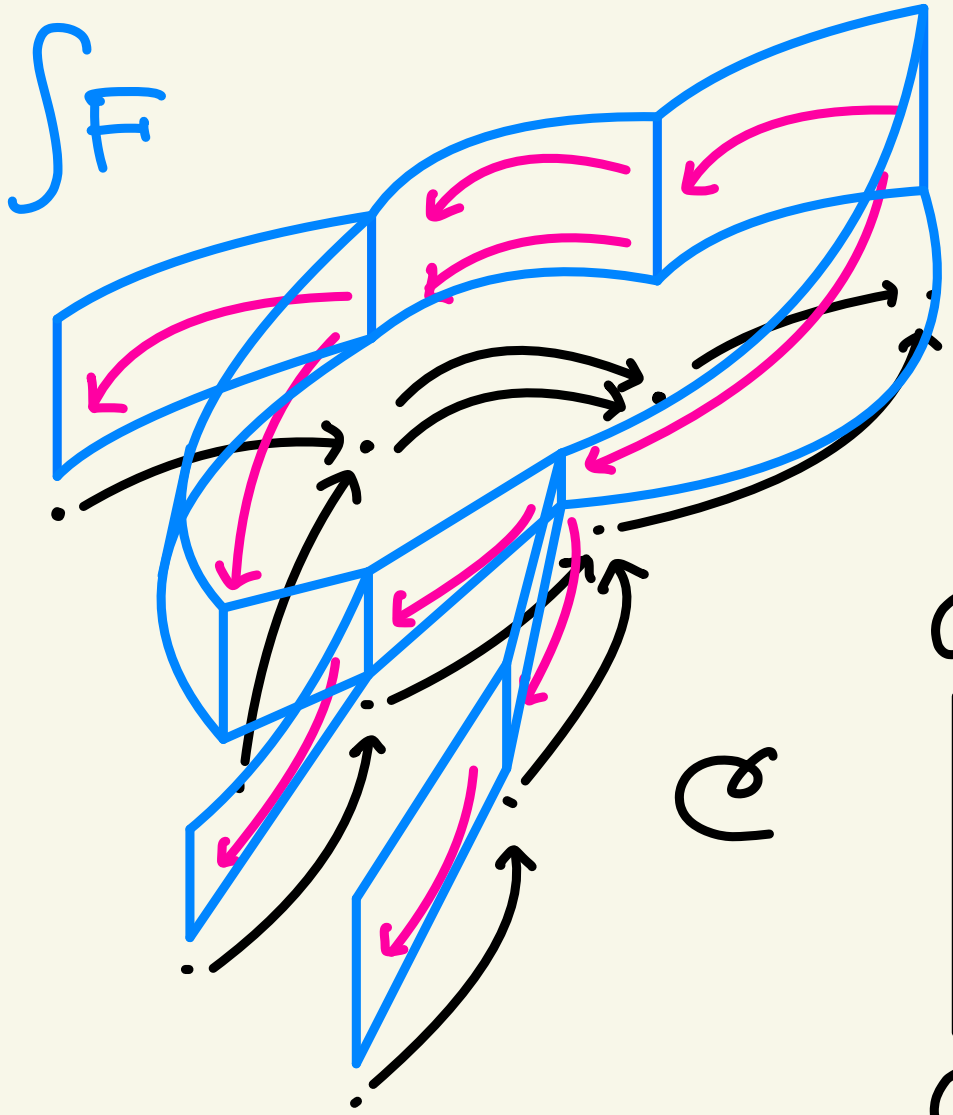
$\mathcal{C}$: $F : \mathcal{C}$ 上の前層。

1つのイメージは、

- x が部分集合。
- F_x が x 上の
  σ数の集合。
- F_f が $z \xrightarrow{f} x$
  に沿って、F_x の
  z への制限(引き戻し。)

色々な前層

・一般のイメージ：束ねる。



青の部分を束ねて
圏とも思える。
（元の圏）

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \\ & & \\ \int F & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{C} \end{array}$$

（$\mathcal{C}$：離散と思い出す。）

元の圏

$\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$ に対して.

- $\int F$ の……
  - 対象：$[x, a \in Fx]$
  - 射 ： $[x, a] \xrightarrow{f} [y, b]$

$$\ni Fx \supseteq a = Ff(y) \xleftarrow{Ff} b \in Fy$$

$a = Ff(y)$ となる f

$$x \longrightarrow y$$

元の圏

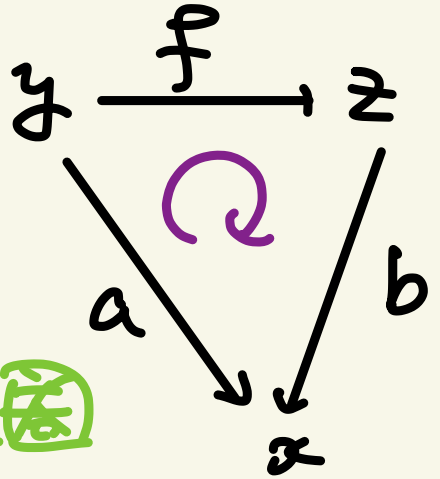
$\mathcal{C}$ が綺麗だから。

$$\text{✡}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x) = よ(x)$$

$$\int よ(x)$$

- 対象：$[y, y \xrightarrow{a} x]$
- 射：$[y, y \xrightarrow{a} x] \xrightarrow{f} [z, z \xrightarrow{b} x]$

⊙ $a = f^*(b) = bf$ ⇔

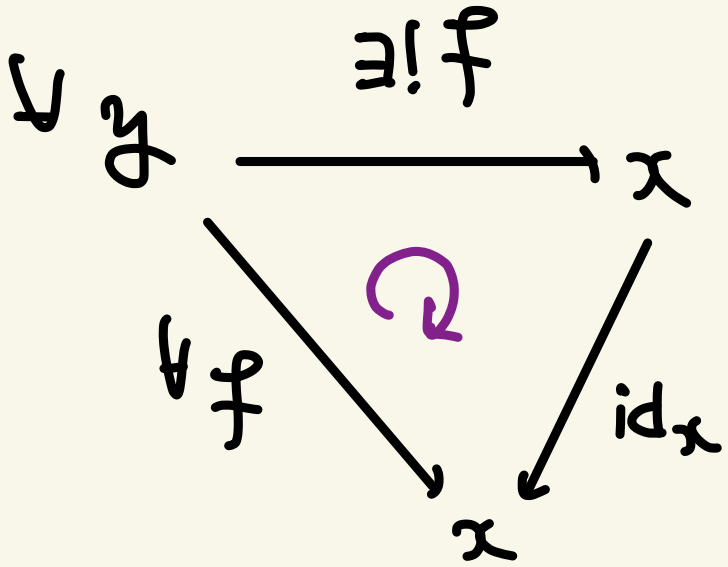


$\rightsquigarrow \int よ(x) \cong \mathcal{C}/x$ ：スライス圏

元の圏

- $\int y(x) \simeq \mathcal{C}/x$ は終対象をもつ。

○ $[x, x \xrightarrow{id_x} x]$ が終対象となる。



米田の補題

米田の補題

$\mathcal{C}$: 小圏

$F \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$: 前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}}(\mathcal{Y}(x), F) \cong F(x)$$

米田の補題

$\mathcal{C}$: 小圏

$F \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$: 前層

が自然同型。

Fの文字での値(の集合)

$$Hom_{Set^{\mathcal{C}^{op}}}(よ(x), F) \cong F(x)$$

函手圏

自然変換の集合

米田の補題

$\mathcal{C}$: 小圏

$F \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$: 前層

・自然変換という大きなデータ(ムラムラ)が、1つの元 $a \in F(x)$ で決まると言っている。

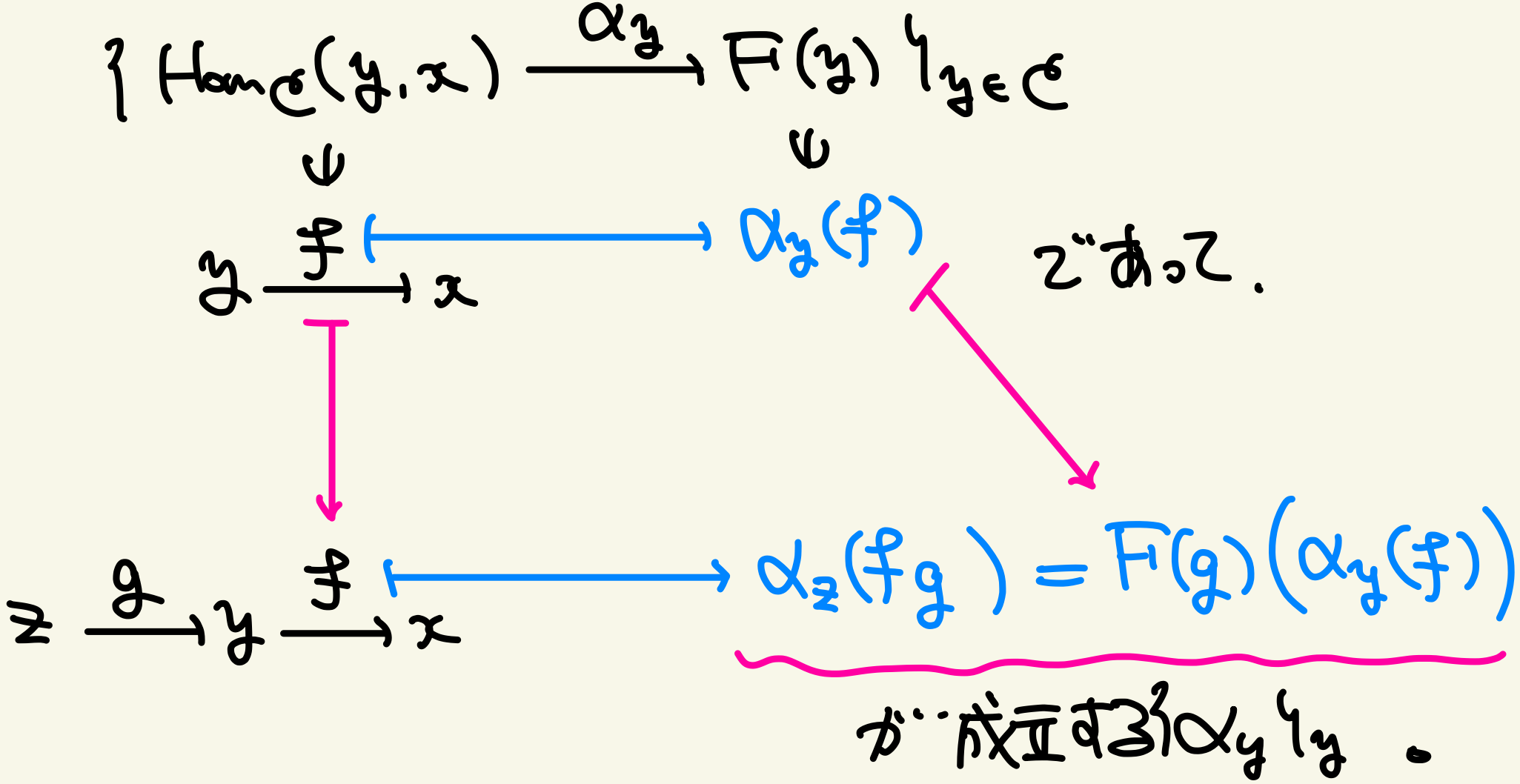
$$Hom_{Set^{\mathcal{C}^{op}}}(よ(x), F) \cong F(x)$$

・右辺のFの値は、よ(x)からFへの射の族という、外側のデータから決まるとも言っている。

米田の補題

直感

- $よ(x) \overset{\alpha}{\Longrightarrow} F$ とは、



米田の補題

直感

ここで！

matching family と自然変換は全く等しい！

$\mathrm{Hom}(y,x) \longrightarrow Fy$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$f \longmapsto S_f := \alpha_y(f)$

Q f_g 上の元 S_{f_g} は、f 上の元 $S_f z$、g で、f_g 上へと引き戻したものに等しい。

とは、$\mathrm{cod}\, f = x$ となる全ての射でパラメタ付けられた

$\{S_f\}_f$

$\bigstar$ $S_{f\cdot g} = S_{f_g}$ （matching family という。）

$F(g)(S_f)$ をこう書いたりする。

米田の補題

直感

matching family $\{S_f\}_f$ は 特別な元 s をもつ。

$\longrightarrow$ S_{id_x} : "id_x は 一番上にある"。

$\int y(x) \cong \mathcal{C}/x$ の終対象！

☆

$\{S_f\}_f$: m.f. $\longmapsto$ $S_{id_x} \in F(x)$

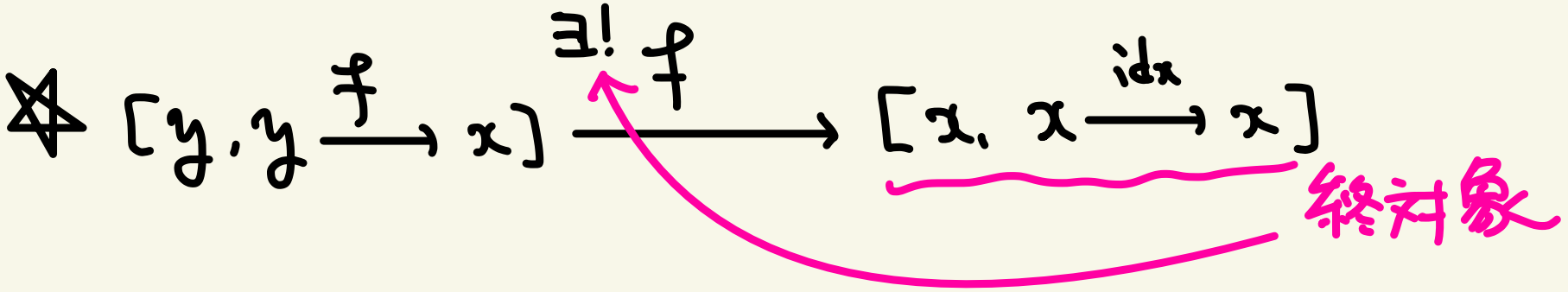
: 一番上のデータだけとり出す！

米田の補題

直感

逆対応は？：$s \in F(x)$ から η_s は 1つ決まる！

$$y \xrightarrow{\forall f} x \quad \rightsquigarrow \quad [y, y \xrightarrow{f} x] \in \int \mathrm{よ}(x)$$

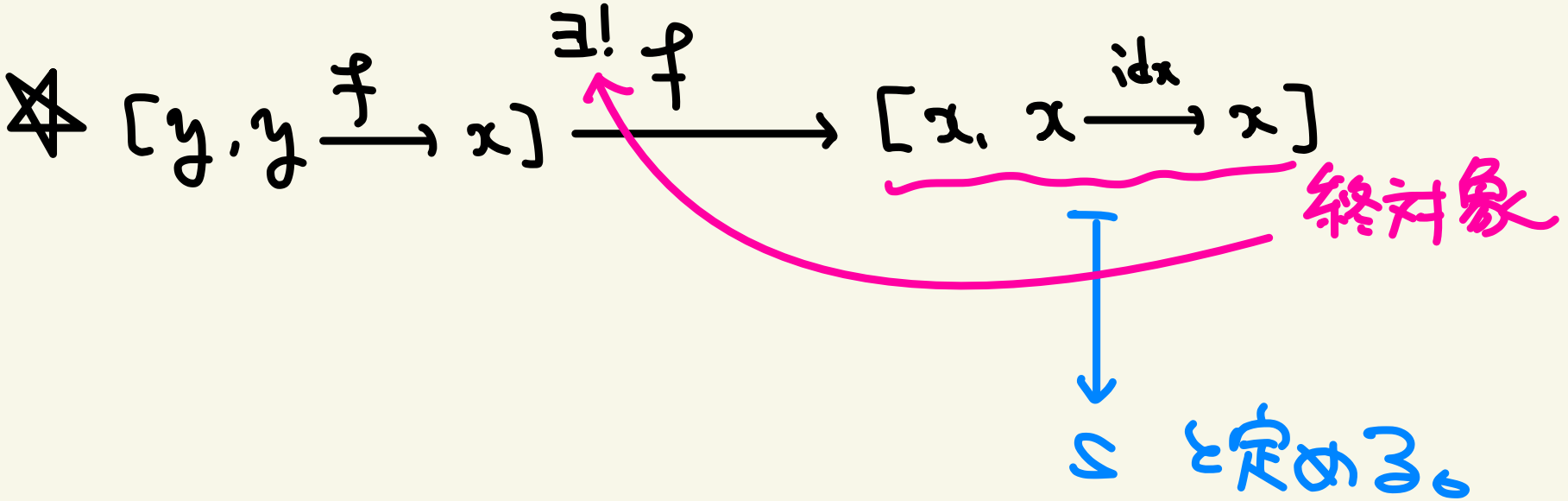


米田の補題

直感

逆対応は？：$s \in F(x)$ から $\exists$ 射 は 一つ定まる！

$$y \xrightarrow{\forall f} x \quad \rightsquigarrow \quad [y, y \xrightarrow{f} x] \in \int \mathrm{よ}(x)$$



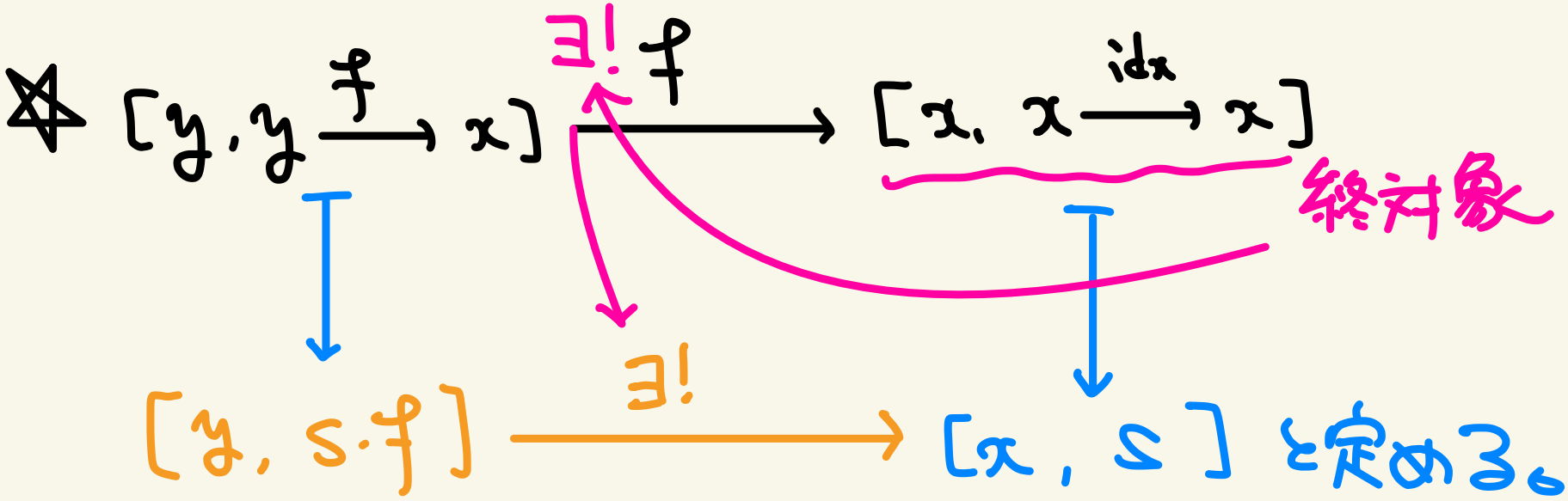
米田の補題

直感

一番の1つの元と、
そこから降りて来た全ての元の組
の対応!!

逆対応は？：$s \in F(x)$ から $\{sf\}$ 1つ決まる！

$$y \xrightarrow{\forall f} x \rightsquigarrow [y, y \xrightarrow{f} x] \in \int y(x)$$



$\rightsquigarrow (s \cdot f) \cdot g = s \cdot (fg)$: matching family!!

米田の補題

☆系

$F = よ(y)$ とすると……

射の関係が
対象の関係を
決定してる！

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}^{op}, Set]}(よ(x), よ(y)) \cong よ(y)(x)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

⇝ これは $よ(-)$ が忠実充満という性質を表す。

⇝ $よ(x) \cong よ(y) \Rightarrow x \cong y$ が従う。

米田の補題

よくある使い方の例

しばしば、Fは普遍性、Gは具体的な構成で与えられる。

F, G：函手。 $F \cong G$ を示したいとき。

Q

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}}(よ(x), F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}}(よ(x), G)$$

$\wr\!\!\|$ ↑ これを示すのが良い時は多い。 $\|\!\!\wr$

$F(x)$ $G(x)$

表現可能函手

$F \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$ が表現可能 とは

- $F \cong よ(t)$ となる $t \in \mathcal{C}$ が存在すること。

Q $z \to x \times y$ と
$z \to x, z \to y$ なる
射のpairは1:1だった!

例

$$F(z) := Hom(z, x) \times Hom(z, y)$$

$$\cong Hom(z, x \times y)$$

⟶ 表現可能性は普遍性の言い換え!

表現可能函手

例　$\mathrm{Hom}(x,-) \sqcup \mathrm{Hom}(y,-) \cong \mathrm{Hom}(x \sqcup y, -)$

$\mathrm{Hom}(-,x) \times_{a} \mathrm{Hom}(-,y) \cong \mathrm{Hom}(-, x \times_{a} y)$

$x \mapsto *$: 1点... という函手

$* \cong \mathrm{Hom}(-, \underline{1})$

終対象

$* \cong \mathrm{Hom}(\underline{\varnothing}, -)$

始対象

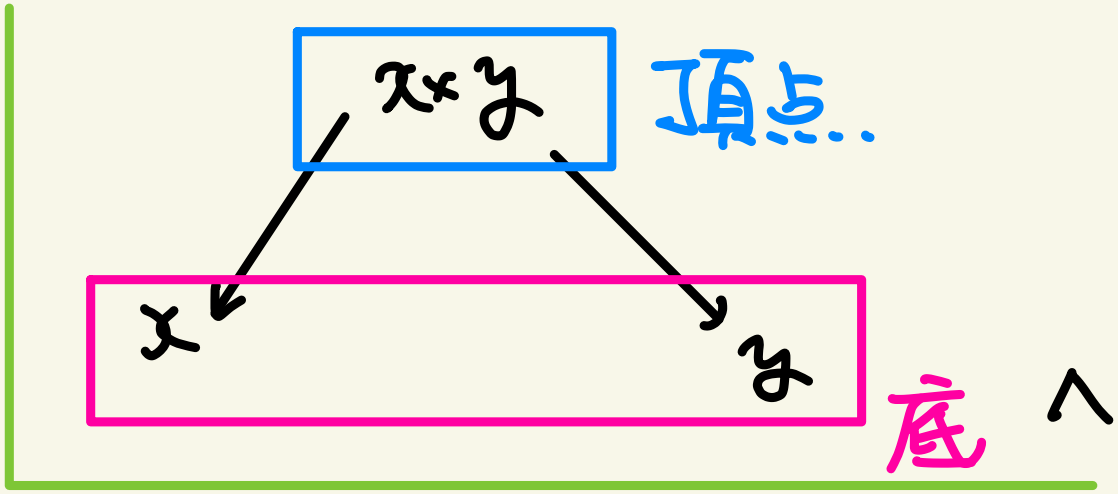
Hom集合の極限の構造を、そのまま

$\longrightarrow \varprojlim_{j} よ(x_j) \cong よ(\varprojlim_{j} x_j)$!!

捉えたのが どこの極限！

極限

積の図式 $x \leftarrow x \times y \rightarrow y$ を、

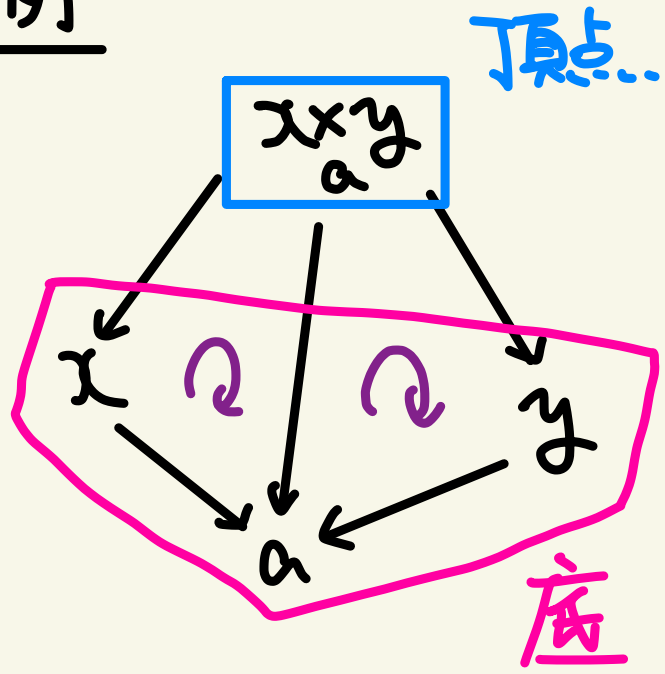


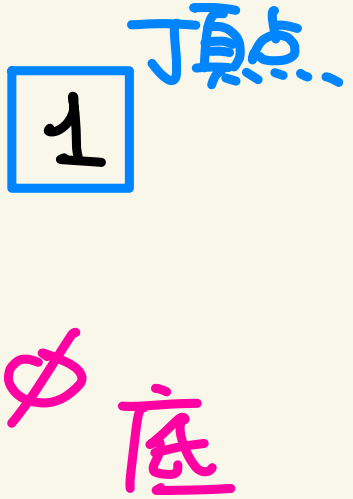
へと合わせて見る。

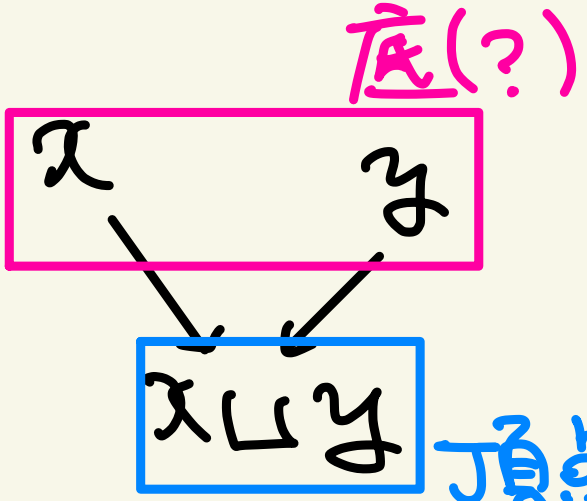
錐(cone)という。

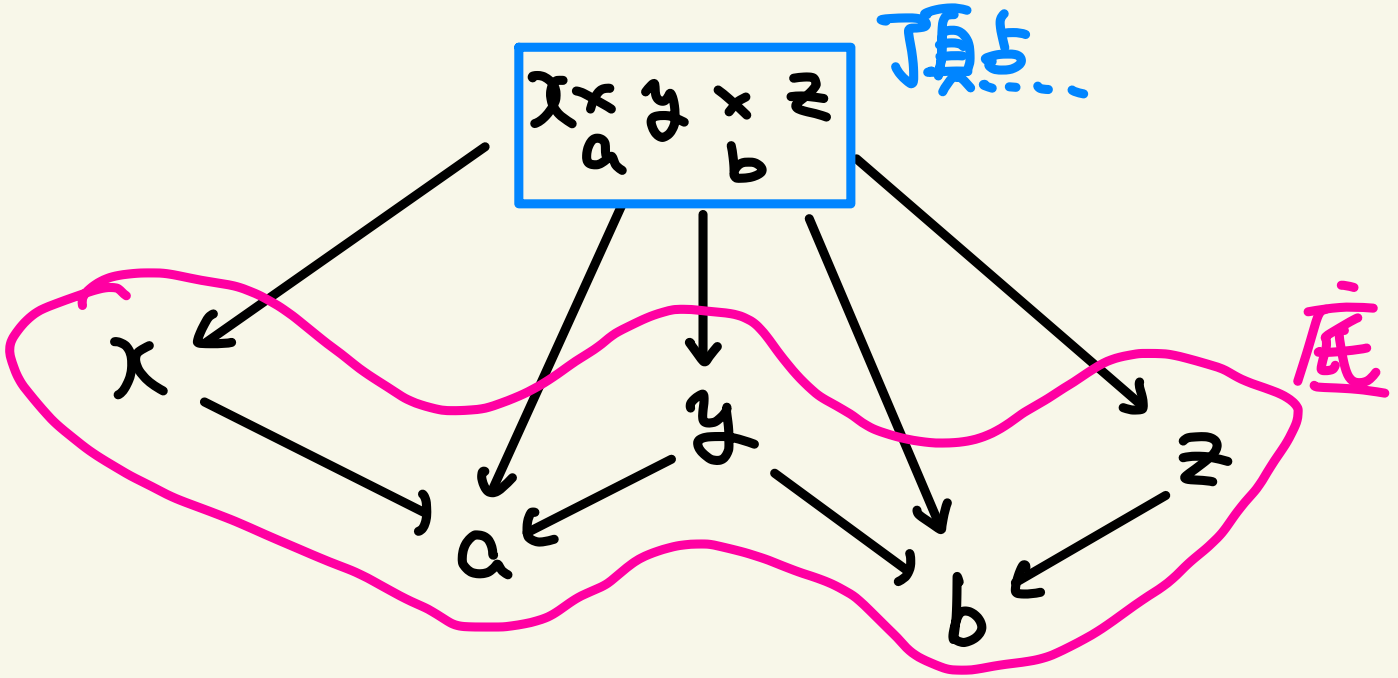
極限

例

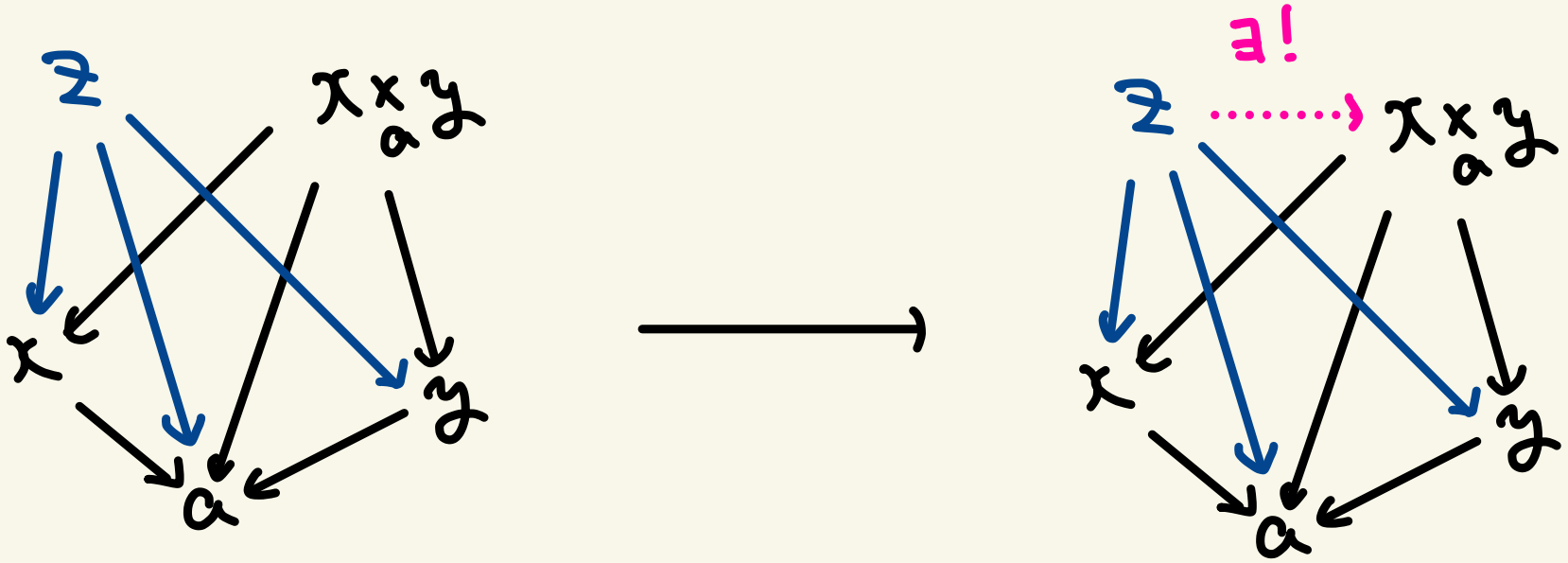








極限



底を共有する2つの錐があると、

他方の頂点 ⟶ 底の射は、

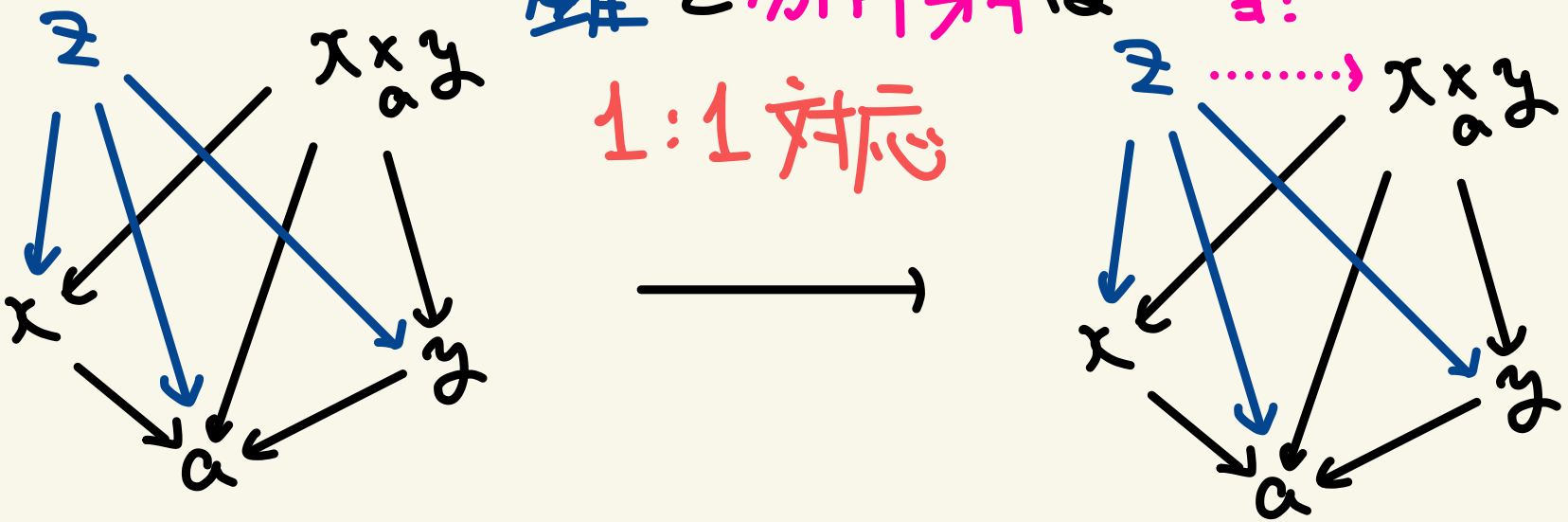
普遍的な頂点を通過して

分解してしまう!!

極限

※Key Idea

錐と分解射は



底を共有する2つの錐があると、

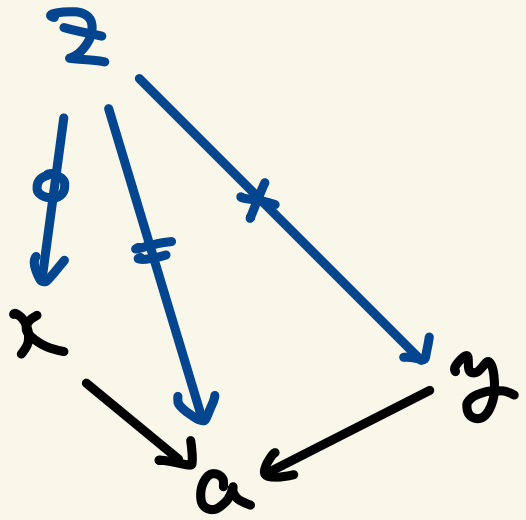
他方の頂点… ⟶ 底の射は、

普遍的な頂点…を通過して

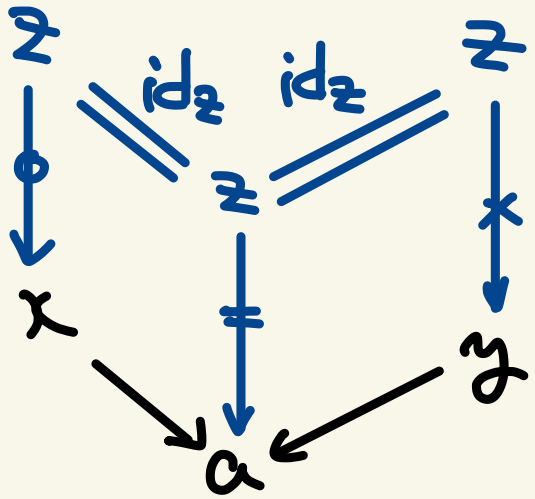
分解してしまう!!

極限

錐を把握する。



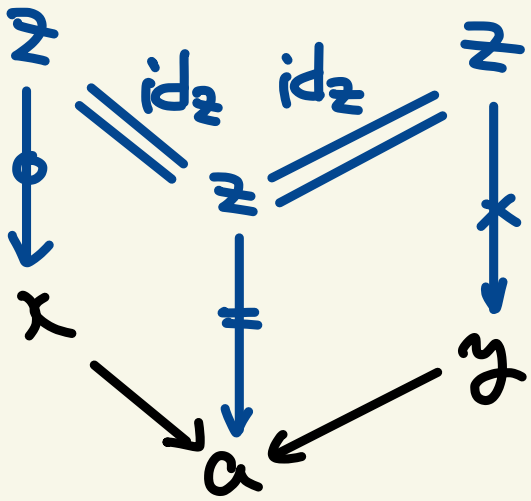
は



と書ける。

極限

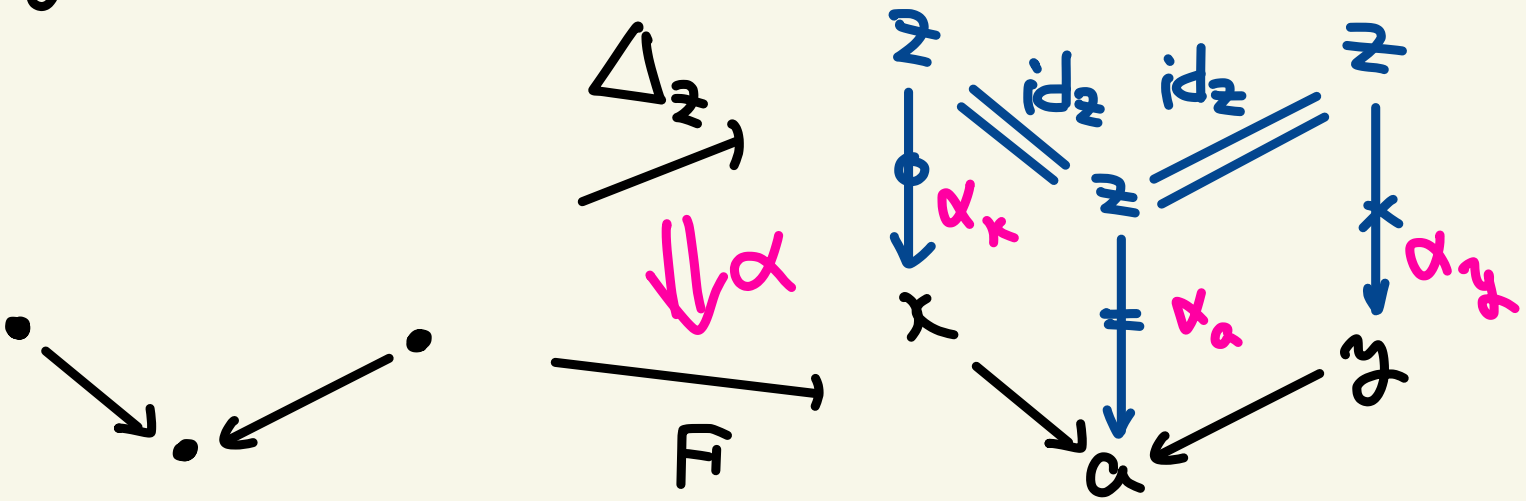
錐を捉え直す。



は、

全てのzとid_zに送る函手：Δ_z
（対角：diagonal のΔ）

このように、
自然変換だと
思える。



Q $\Delta_z \xrightarrow{\alpha} F$: Cone!

極限

普遍性とは……

$\Delta_z \xrightarrow{\alpha} F$ と $z \longrightarrow \varprojlim_J F$ (分解射 $\exists$)

(錐)

が 1:1 に対応している。

そのような $\varprojlim_J F$ と書く対象を

Fの極限という。

極限

表現可能性

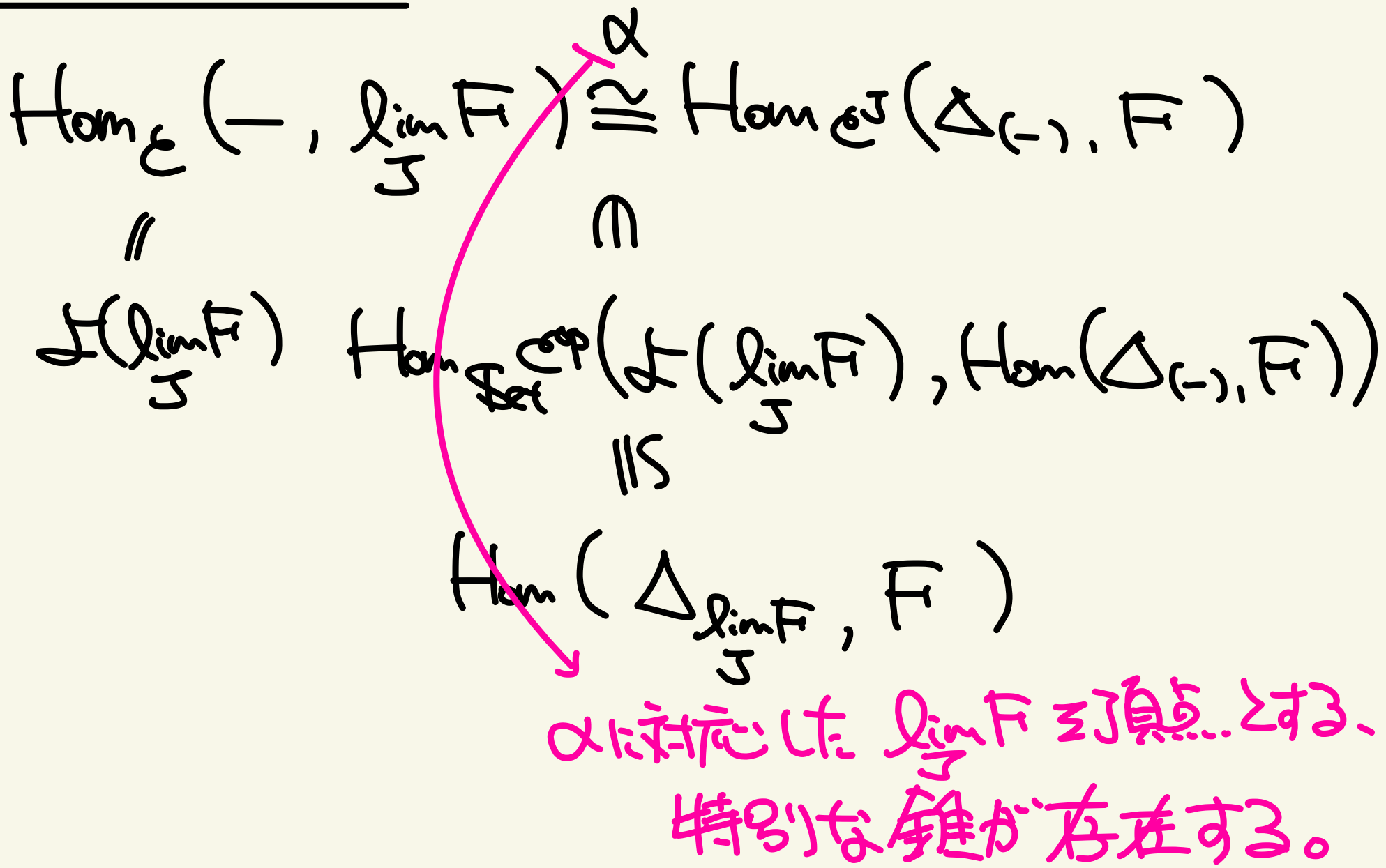
$$Z \longmapsto \mathrm{Cone}(Z, F) = \mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}, \mathcal{J}]}(\Delta_Z, F) \in \mathbf{Set}$$

$\mathcal{C}(x) \times \mathcal{C}(y)$ や $\mathcal{C}(x) \otimes \mathcal{C}(y)$ は例。

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Cone}(-, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ が定まる。

極限

表現可能性


$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \varprojlim_J F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^J}(\Delta_{(-)}, F)$
α
$\rotatebox{90}{$=$}$
$\rotatebox{90}{$\in$}$
$\mathcal{H}(\varprojlim_J F)$
$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathcal{H}(\varprojlim_J F), \mathrm{Hom}(\Delta_{(-)}, F))$
$\rotatebox{90}{$=$}$
$\mathrm{Hom}(\Delta_{\varprojlim_J F}, F)$
αに対応した $\varprojlim F$ を頂点…とする、
特別な錐が存在する。

極限

表現可能性

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(-, \varprojlim_{J} F\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^J}\left(\Delta_{(-)}, F\right)$$

$$\| \qquad\qquad \text{自然?!}$$

$$H\left(\varprojlim_{J} F\right) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}}\left(H\left(\varprojlim_{J} F\right), \mathrm{Hom}\left(\Delta_{(-)}, F\right)\right)$$

$$\| \mathrm{Y}$$

$$\mathrm{Hom}\left(\Delta_{\varprojlim_{J} F}, F\right)$$

逆に、普遍的な錐があれば、
その錐を用いて、任意の錐が分解でき、isom.

極限

表現可能性

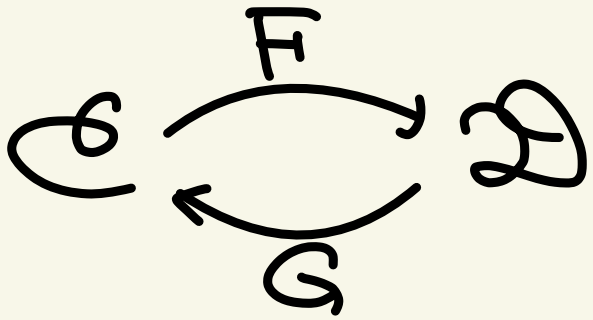
米田で解釈すると、

普遍性とは表現可能性

と等価である。

随伴

双方向の函手対



であって、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, Gy)$$

x, y について自然に。

が成立するもの。 $F \dashv G$ と書く。

左 / 右 随伴 と言う。

随伴

双方向の写手対

例　X, Y：集合。$X \xrightarrow{f} Y$：写像。

$$P(X) \underset{f^{-1}}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} P(Y)$$

思い出して。

$$f_*A \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$$

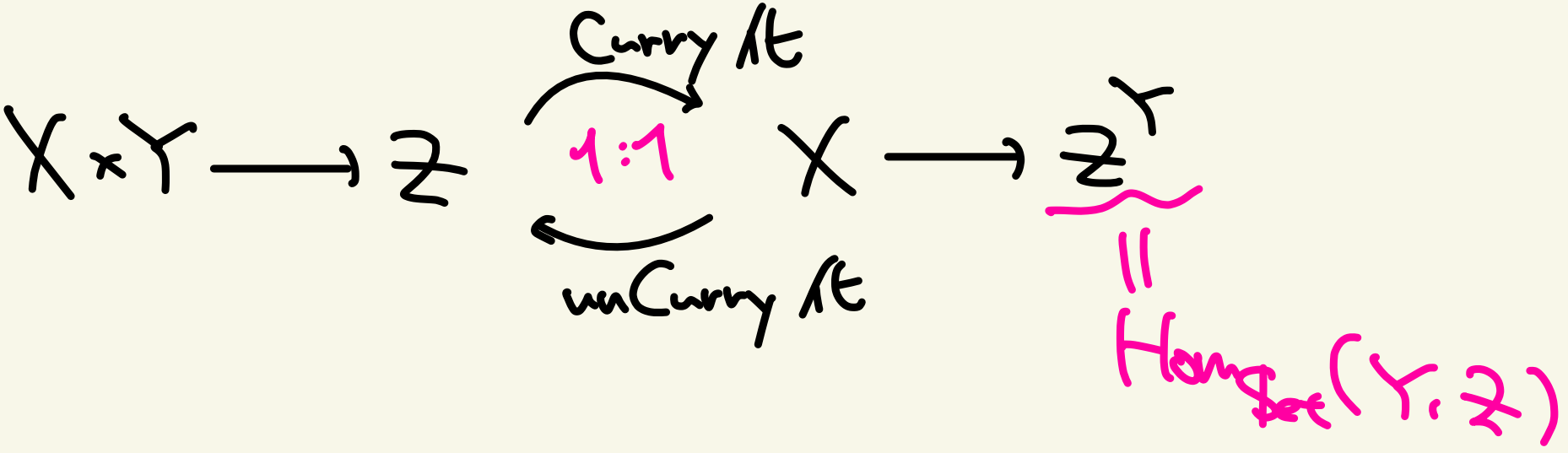
$\mathrm{Hom}_{P(X)}(f_*A, B) \cong \mathrm{Hom}_{P(X)}(A, f^{-1}B)$

$P(X), P(Y)$：ポセットの射！

随伴

双方向の写像対

例　X, Y, Z：集合。 $X \times Y \xrightarrow{\varphi} Z$ ：写像。



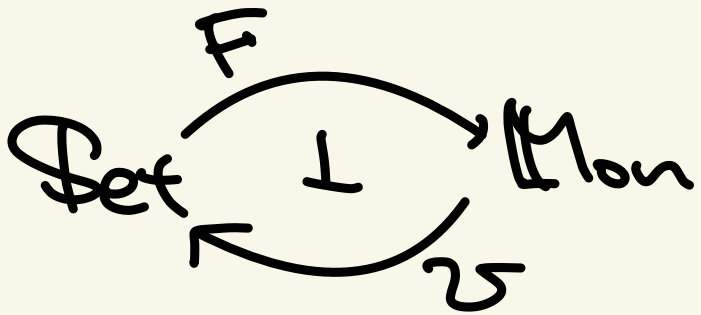
$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{Set}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{Set}(X, Z^Y)$

随伴

双方向の写手対

Mon, Vect, Grp, Ring, ...

例　無数の自由と忘却の随伴



：

FX：Xが生成する自由モノイド

UM：モノイドの台集合をとる。
（構造の忘却）

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(FX, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, UM)$$

生成元の行き先が
FXからMへの準同型を一意に定める。

随伴

双方向の対手対

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(x,y) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \leq y$

例 $\mathbb{Z}$: 離散圏 / $\leq$: ポセット

$$x+a = y \quad \underset{+a}{\overset{-a}{\rightleftarrows}} \quad x = y-a$$

$(\leq)$ 1:1 $(\leq)$

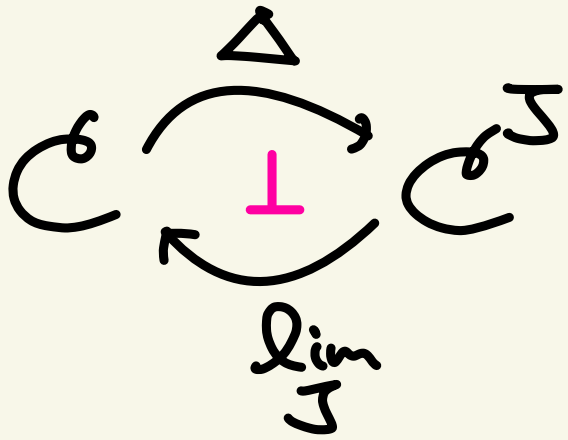
○ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(x+a, y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(x, y-a)$

(移項の拡張)

随伴

双方向の忠実対

例



$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{J}}}(\Delta_{(-)}, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \lim_{\mathcal{J}} F)$$

$\Delta \dashv \lim_{\mathcal{J}}$ である！

随伴

随伴の使い方の例

右随伴は極限を保つ

Q Want : $L \dashv R$, $R(\varprojlim F) \cong \varprojlim RF$?

(∵) Yoneda思考

$$\mathrm{Hom}(x, R(\varprojlim F)) \cong \mathrm{Hom}(Lx, \varprojlim F)$$

$$\cong \varprojlim_{j \in J} \mathrm{Hom}(Lx, F(j))$$

$$\cong \varprojlim_{j \in J} \mathrm{Hom}(x, RF(j))$$

$$\cong \mathrm{Hom}(x, \varprojlim_{j \in J} RF(j))$$

☆集合から考える。

随伴

随伴の使い方の例

右随伴は極限を保つ

Q Want : $L \dashv R$, $R(\lim_J F) \cong \lim_J RF$?

(∵) Yoneda思考

$$\mathrm{Hom}(x, R(\lim_J F)) \cong \mathrm{Hom}(x, \lim_{j \in J} RF(j))$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{Y}(R\lim_J F) \cong \mathcal{Y}(\lim_J RF)$$

$$\rightsquigarrow \quad R\lim_J F \cong \lim_J RF \qquad \square$$

こんな風に使うよ!!

補遺

行列？

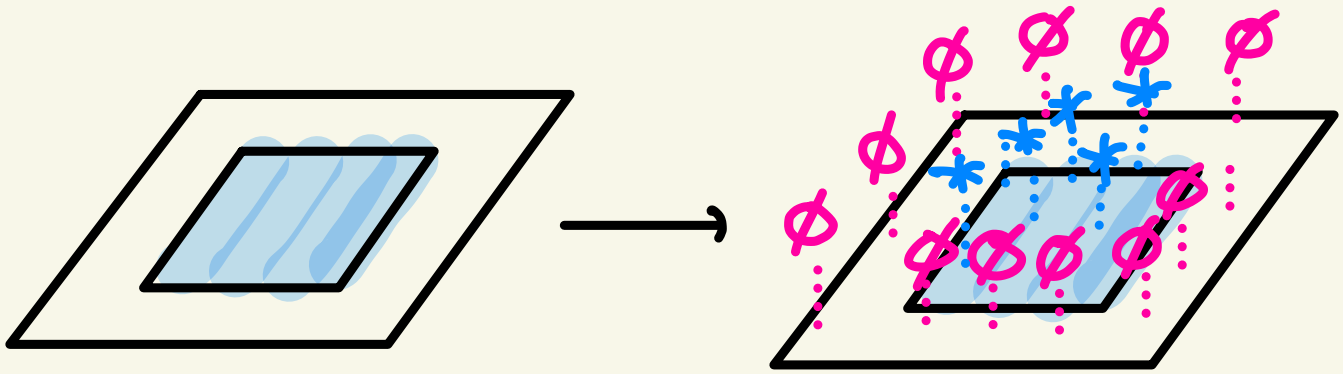
☆世界観の転換：前層ってベクトル？

元から部分集合へ。

部分集合から前層へ。

行列？

☆世界観の転換：前層ってベクトル？



0, 1 の代わりに

∅, * が乗っている

と思う！

↪ 前層。

↪ より一般に何でも乗せてもいい

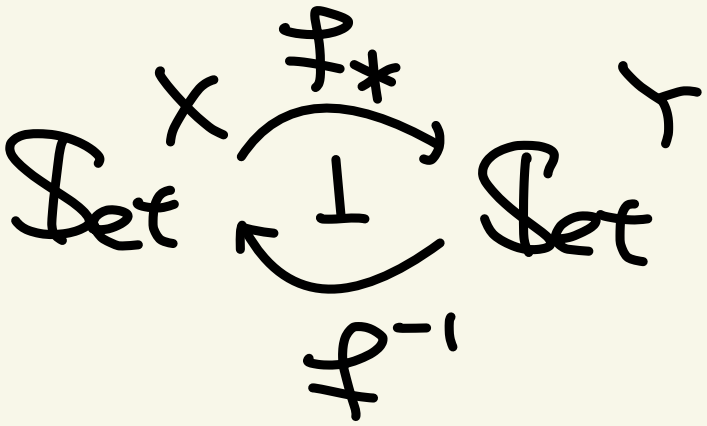
とすれば、より表現できるものが増える！

行列？

✡世界観の転換：前層ってベクトル？

$P(X) \hookrightarrow Set^X$ へ。

- $X \xrightarrow{f} Y$

$\hookrightarrow$ 

行列？

✡世界観の転換：前層ってベクトル？

$F \in \mathrm{Set}^X$

∨ の類似

$\rightsquigarrow f_* F(y) = \coprod_{x \in f^{-1}(y)} F(x)$

$G \in \mathrm{Set}^Y$

写像行列 ≒ Fに作用。

$\rightsquigarrow f^* G(x) = G(f(x))$

$y = f(x)$ となる x について不変。fiber方向へ伸ばす。

行列？

✡世界観の転換：前層ってベクトル？

$F \in Set^X$

$\rightsquigarrow f_* F(y) = \coprod_{x \in f^{-1}(y)} F(x)$

∨の類似

X, Yが一般の圏の時にも…!?

$G \in Set^Y$

写像行列 ≈ Fに作用。

$\rightsquigarrow f^* G(x) = G(f(x))$

$y = f(x)$ となる x について不変。fiber方向へ伸ばす。

参考文献

- 「Sheaves in Geometry and Logic」 Maclane & Moerdijk
- 「圏論の基礎」: Maclane
- 「プログラマーのための圏論」: Milewski
- 「Categories in Context」: Riehl
- 「壱大整域」: alg-d
- GPT-6

「結びつく圏論」 訳: 前原


Thank
You!!